विषय सूची

खण्ड (अ)

निर्देशांक ज्यामिति

खण्ड (ब)

अवकलन गणित

प्राक्कथन

गणित तथा विज्ञान के क्षेत्र में प्रति क्षण हो रही तीव्र प्रगति को ध्यान में रखते हुये माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान, ने जो गत वर्ष सेकण्डरी तथा इस वर्ष हायर सेकण्डरी स्तर पर प्रगतिशील पाठ्यक्रम निर्धारित करके उपयुक्त समय पर एक सही दिशा में कदम उठाया है उसके लिए बोर्ड बधाई का पात्र है। प्रस्तुत पुस्तक का उद्देश्य भी गणित के इस नवीन पाठ्यक्रम को हायर सेकण्डरी के विद्यार्थियों के स्तर पर प्रस्तुत करना है।

यह पुस्तक हायर सेकण्डरी की ऐच्छिक गणित के द्वितीय प्रश्न पत्र के लिये लिखी गई है। इसे दो खण्डों में विभक्त किया गया है।

खण्ड (अ) निर्देशांक ज्यामिति
खण्ड (ब) अवकलन गणित

पुस्तक में विद्यार्थियो के बौद्धिक एवं तर्कना शक्ति के क्रमिक विकास का ध्यान रखते हुए विषय को सरल एवं रुचिकर बनाने का भरसक प्रयत्न किया गया है, पुस्तक की भाषा सरल, सुग्राह्य तथा सर्व प्रचलित है। पारिभाषिक शब्द भारत सरकार के शिक्षा मन्त्रालय द्वारा प्रकाशित विज्ञान शब्दावली-I (1964) तथा विज्ञान शब्दावली-II (1967) से ही लिये गये हैं संकेताक्षर सभी अंग्रेजी में ही रखे गये हैं। तथा पारिभाषिक शब्दो के साथ साथ उनके अंग्रेजी पर्यायवाची शब्द भी दिये गये हैं।

विषय के प्रतिपादन मे बोर्ड द्वारा निर्मित उद्देश्यों (objectives) एव निर्धारित पृष्ठ संख्या की मर्यादा का पूर्ण पालन किया गया है। प्रत्येक अध्याय मे विद्यार्थियो के ज्ञान व उसका प्रयोग तथा दक्षता (knowledge, application and skill) की जाच हेतु वस्तुनिष्ठ (objective type) प्रश्न भी प्रचुर मात्रा मे दिये गये है। प्रश्नावलियों मे प्रश्नो को व्यवस्थित करने में

ज्ञात से अज्ञात की ओर तथा सरलता से कठिनता की ओर जाने का पूर्ण प्रयास किया गया है ।

स्थानाभाव होते हुए भी विभिन्न प्रकार के प्रश्नों को दृष्टान्तीय रूप में हल किया गया है जिनकी सहायता से प्रश्नावलियों में दिये गये प्रश्न सहायता से हल किये जा सकते हैं । निर्देशांक ज्यामिति में प्रश्नों को हल करने में चित्रों का विशेष महत्व है । अतः वाच्छनीय स्थलों पर चित्रों का प्रयोग पर्याप्त मात्रा में किया गया है । अवकलन में फलन एवं उनकी सीमा की मूल संकल्पनाओं को बहुत स्पष्ट किया गया है तथा अवकल गुणांक का ज्यामितीय अर्थ स्पष्ट कर उसकी ज्यामिति में महत्वपूर्ण भूमिका दर्शाई गई हैं ।

लेखक अपने परिश्रम पूर्ण प्रयास को सफल तभी मानेंगे जब यह पुस्तक विद्यार्थियों के लिए अधिक से अधिक लाभदायक मानी जायेगी ।

पुस्तक को अधिक उपयोगी बनाने के लिये शिक्षकों व पाठकगणों के संकेत और सुझावों का सहर्ष हार्दिक स्वागत किया जायेगा ।

'विजया दशमी'

29 सितम्बर, 1971

लेखक द्वय

द्वितीय संस्करण

बोर्ड के सुझावों का पूर्ण समावेश कर दिया गया है ।

रविवार,

25 जून, 1972

लेखक द्वय

तृतीय संस्करण

द्वितीय संस्करण की अशुद्धियों का पूर्ण रूप से सुधार कर दिया गया है ।

1 मई, 1973

लेखक द्वय



खण्ड (अ)

निर्देशांक ज्यामिति
(Co-ordinate Geometry)

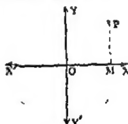
1

बिन्दुओं के निर्देशांक
(Co-ordinates of points)

1·0. परिभाषाएँ :—

समतल निर्देशांक ज्यामिति (Plane Co-ordinate Geometry) ज्यामिति की वह शाखा है जिसमें समतल में स्थित बिन्दुओं, रेखाओं तथा वक्रों का अध्ययन किया जाता है। समतल में स्थित किसी बिन्दु की स्थिति को हम दो मापों से व्यक्त करते हैं। इन माप संख्याओं को बिन्दु के नियामक या निर्देशांक (Co-ordinates) कहते हैं। बीजगणित के सिद्धान्तों के प्रयोग के कारण निर्देशांक ज्यामिति को वैश्लेषिक ज्यामिति (Analytical Geometry) भी कहते हैं। यह शाखा समतल ज्यामिति की अपेक्षा अधिक शक्तिशाली व उपयोगी सिद्ध हुई है।

निर्देश अक्ष (Axes of reference)—मान लो XOX' तथा YOY' परस्पर लम्ब तथा किसी लम्बाई की दो सरल रेखाएँ हैं। ये एक दूसरे को O बिन्दु पर काटती हैं। XOX' दायें से बायें तथा YOY' ऊपर से नीचे खींची जाती हैं। रेखा XOX' को x का अक्ष अथवा x–अक्ष तथा रेखा YOY' को y का अक्ष अथवा y–अक्ष कहते हैं। क्योंकि ये दोनों अक्ष अनन्त



चित्र 1

लम्बाई की मानी जाती हैं अतः इस तथ्य को हमने चित्रों में इनके सिरों पर तीर लगाकर व्यक्त किया है। इन दोनों रेखाओं को एक साथ निर्देशाक्ष (axes of reference) *अथवा परस्पर समकोण होने के कारण समकोणाक्ष (rectangular* axes) भी कहते हैं। यदि XOX' तथा YOY' परस्पर लम्ब न हों तो उन्हें तिर्यक् अक्ष (oblique axes) कहते हैं। किन्तु इस पुस्तक में हम इन निर्देश अक्षों को सर्वदा परस्पर लम्बात्मक ही मानेंगे।

मूल बिन्दु (Origin)—निर्देश अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु O को मूल बिन्दु कहते हैं।

1·1. नियामक अथवा निर्देशांक (Co-ordinates)—समतल में स्थित किसी बिन्दु P से OX पर लम्ब PM डालो तथा लम्बाई OM और PM को क्रमानुसार x तथा y से व्यक्त करो। तब x को बिन्दु P का भुज (abscissa) तथा y को P की कोटि (ordinate) कहते हैं। x तथा y दोनों को मिलाकर P के कार्तीय निर्देशांक* (Cartesian co-ordinates) कहते हैं और x तथा y को पृथक्-पृथक् x–निर्देशांक तथा y–निर्देशांक भी कहते हैं। ऐसे किसी बिन्दु P को इसके निर्देशांकों को कोष्टक में रखकर संक्षेप में (x, y) संकेत से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार हम x–अक्ष के समान्तर नापी हुई बिन्दुओं की दूरियों को $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ से तथा y–अक्ष के समान्तर नापी हुई बिन्दुओं की दूरियों को $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ से व्यक्त करेंगे।

यदि हमको किसी बिन्दु की स्थिति ज्ञात हो तो हम सरलता से उसके निर्देशांक ज्ञात कर सकते हैं और विलोमतः यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक (x, y) ज्ञात हों तो हम समतल में उस बिन्दु की स्थिति निश्चित कर सकते हैं अर्थात् चित्र में उसे अंकित कर सकते हैं। इस प्रकार प्रत्येक निर्देशांक-युग्म से केवल एक ही बिन्दु प्राप्त होता है तथा प्रत्येक बिन्दु के संगत एक ही निर्देशांक-युग्म प्राप्त होता है। यह निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली की एक विशेषता है।

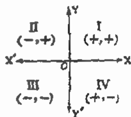
1·11. ज्ञात व अज्ञात निर्देशांकों के संकेतन—जब किसी बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात होते हैं तो बीजगणित की रूढ़ि के अनुसार उसके निर्देशांकों को अंग्रेजी वर्णमाला के प्रारम्भिक अक्षरों से व्यक्त करते हैं यथा (a, b), (c, d) इत्यादि और यदि बिन्दु के निर्देशांक अज्ञात हों तो उन्हें वर्णमाला के अन्तिम अक्षरों बहुधा (x, y) से व्यक्त करते हैं। एक से अधिक अज्ञात बिन्दुओं के निर्देशांक (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).....आदि माने जाते हैं।

---

*निर्देशांक की इस पद्धति को सर्वप्रथम प्रयोग में लाने वाले गणितज्ञ डे-कार्टीज (Descartes) के नाम के पीछे इसको कार्तीय पद्धति (Cartesian system) तथा ऐसे निर्देशांकों को कार्तीय निर्देशांक कहते हैं।

1·2. निर्देशांकों के चिह्नों की रूढ़ि (Convention about the signs of co-ordinates)—त्रिकोणमिति में मानी गई रूढ़ि के अनुसार बिन्दु P का भुज धन (positive) होगा यदि वह O से दांई ओर अर्थात् OX की दिशा में मापा जाये और भुज ऋण (negative) तब होगा जब वह O से बांई ओर OX' की दिशा में मापा जाये। इसी प्रकार O से ऊपर की ओर OY की दिशा में मापी गई कोटि धन तथा O से नीचे की ओर OY' की दिशा में मापी गई कोटि ऋण होगी। यह रूढ़ि सब गणितज्ञों द्वारा मान्य है।

निर्देशअक्ष XOX' तथा YOY' समतल को चार भागों में विभक्त करती हैं। ये चार भाग XOY, YOX', X'OY' तथा Y'OX हैं और ये क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ चरण या पाद (quadrant) कहलाते हैं। उपरोक्त रूढ़ि के अनुसार (*i*) प्रथम पाद में स्थित किसी बिन्दु के दोनों निर्देशांक (x, y) अर्थात् भुज तथा कोटि धन होते हैं; (*ii*) द्वितीय पाद में स्थित किसी बिन्दु का भुज x ऋण होता है तथा कोटि y धन होती है; (*iii*) तृतीय पाद में स्थित किसी बिन्दु के दोनों निर्देशांक (x, y) ऋण होते हैं; (*iv*) चतुर्थ पाद में स्थित किसी बिन्दु का भुज x धन होता है तथा कोटि y ऋण होती है।



चित्र 2

विभिन्न पादों में स्थित बिन्दुओं के निर्देशांकों के ये चिह्न चित्र 2 में प्रदर्शित हैं।

टिप्पणी—निर्देशांकों को मापने के लिये पहले लम्बाई की कोई इकाई निश्चित करनी पड़ती है। फिर सब लम्बाईयों को इस इकाई की राशि में रखा जाता है; जैसे लेखाचित्र (graph) में यदि दो छोटे वर्गों को इकाई मानें तो यदि एक बिन्दु की x-अक्ष तथा y-अक्ष के समान्तर दूरी क्रमशः 6 वर्गों तथा 8 वर्गों के बराबर हो तो उसके निर्देशांक (3, 4) होंगे।

1·3. विन्दुओं को अंकित करना (Plotting of points)—जब किसी विन्दु के निर्देशांक दिए हुए हों तो निर्देश अक्षों के समतल पर इसकी स्थिति निश्चित करने के कार्य को इस विन्दु को अंकित करना कहते हैं। यदि किसी विन्दु के निर्देशांक (a, b) हों तो उसकी स्थिति निश्चित करने के लिए हम x–अक्ष की दिशा में a इकाई की लम्बाई नापते हैं (O के दांई या वांई ओर, a के धन व ऋण होने के अनुसार) तब y–अक्ष के समान्तर b इकाई के वरावर दूरी नापकर (OX से ऊपर या नीचे की ओर, b के धन व ऋण होने के अनुसार) हम दिए हुए विन्दु की अभीष्ट स्थिति पर पहुँचते हैं। इस सम्वन्ध में निम्न वातें स्मरण रखनी चाहियें :—

(*i*) मूल विन्दु O के निर्देशांक (0,0) होते हैं।

(*ii*) y–अक्ष पर स्थित प्रत्येक विन्दु का भुज (x–निर्देशांक) शून्य होता है।

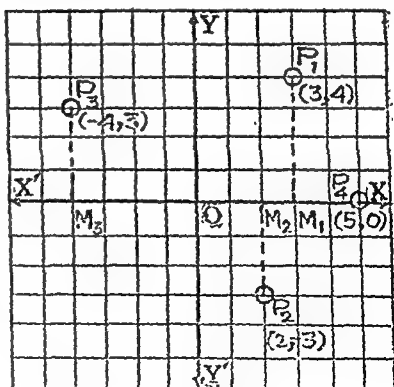
(*iii*) x–अक्ष पर स्थित प्रत्येक विन्दु की कोटि (y–निर्देशांक) शून्य होती है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. निम्न निर्देशांकों वाले विन्दुओं को चित्र में अंकित करिये।

(*i*) (3,4); (*ii*) (2,—3); (*iii*) (—4, 3); (*iv*) (5, 0)

क्रिया : (*i*) OX के अनुगत (along), O के दांई ओर $OM_1 = 3$ इकाई नापो। OM_1 के समकोण तथा OX से ऊपर $M_1 P_1 = 4$ इकाई नापो। इस प्रकार अभीष्ट विन्दु P_1 (3, 4) प्राप्त होता है।



चित्र 3

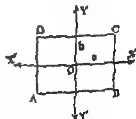
(*ii*) x-अक्ष की दिशा मे O के दाहिनी ओर $OM_2=2$ इकाई नापो। फिर OM_2 के लम्ब तथा OX से नीचे की ओर $M_2P_2=3$ इकाई नापो। इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु P_2 $(2,-3)$ प्राप्त होता है।

(*iii*) x-अक्ष पर O से बाईं ओर $OM_3=4$ इकाई नापो। फिर OM_3 के लम्ब तथा x-अक्ष से ऊपर को ओर $M_3P_3=3$ इकाई नापो। इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु P_3 $(-4,3)$ प्राप्त होता है।

(*iv*) x-अक्ष पर O से दाईं ओर $OP_4=5$ इकाई नापो। अब क्योंकि इसका y-निर्देशांक शून्य है। अतः बिन्दु P_4, x-अक्ष पर स्थित है, इस प्रकार P_4 ही अभीष्ट बिन्दु $(5, 0)$ है।

उदाहरण 2. एक आयत की भुजाऐं लम्बाई में $2a$ तथा चौड़ाई में $2b$ हैं। इसके केन्द्र पर मूल बिन्दु तथा $2a$ लम्बाई वाली भुजा के समान्तर x-अक्ष लेकर आयत के सब शीर्षों के निर्देशांक बताइये।

क्रिया : निर्देश अक्ष XOX' तथा YOY' चित्र में प्रदर्शित हैं। आयत के केन्द्र को मूल बिन्दु मानकर हम देखते हैं कि प्रत्येक शीर्ष के भुज का संख्यात्मक मान a है तथा कोटि का संख्यात्मक मान b है। इन भुजों व कोटियों के साथ इनके यथोचित चिन्हों को लगाने पर हम देखते हैं कि



चित्र 4

(*i*) शीर्ष A के निर्देशांक $(-a,-b)$ हैं।

(*ii*) शीर्ष B के निर्देशांक $(a,-b)$ है।

(*iii*) शीर्ष C के निर्देशांक (a, b) है।

(*iv*) शीर्ष D के निर्देशांक $(-a, b)$ है।

1·4. दो विन्दुओं के वीच की दूरी ज्ञात करना जबकि उनके निर्देशांक दिए हुए हों।

मान लो दिए हुए विन्दुओं P_1 तथा P_2 के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हैं। तथा उनके वीच की दूरी $P_1 P_2 = d$ है। P_1 तथा P_2 से x-अक्ष पर क्रमशः लम्ब P_1L और P_2M खींचों। फिर P_1 से P_2M पर लम्ब P_1R डालो। चित्र द्वारा

$P_1R = LM = OM - OL = x_2 - x_1$

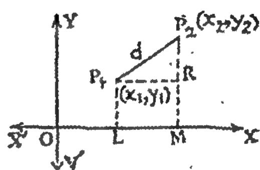
तथा $\quad P_2R = P_2M - RM = y_2 - y_1$

अब समकोण त्रिभुज $P_1R\, P_2$ में,

$$d^2 = P_1P_2^2$$

$$= (P_1R)^2 + (P_2R)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



चित्र 5

$$\therefore \quad \boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

अतः दो विन्दुओं के वीच की दूरी

$$= \sqrt{(x \text{ निर्देशांकों का अन्तर})^2 + (y \text{ निर्देशांकों का अन्तर})^2}$$

$$= \sqrt{(\text{भुजों का अन्तर})^2 + (\text{कोटियों का अन्तर})^2}$$

टिप्पणी—यद्यपि यह सूत्र यहाँ P_1 व P_2 के प्रथम पाद में स्थित होने के लिए ही सिद्ध किया गया है किन्तु यह एक व्यापक सूत्र है। अत: P_1 व P_2 के किसी भी पाद में स्थित होने पर भी यह सत्य है। निर्देशांक ज्यामिति के अन्य सूत्र भी सब पादों के लिए सत्य हैं।

यदि P_1 अथवा P_2 किसी अन्य पाद में स्थित हों तो इस सूत्र का उपयोग करते समय निर्देशांकों के साथ उनके सही चिन्ह रखने चाहिए उदाहरणतः यदि (x_2, y_2) चतुर्थ चरण में हो तो y_2 ऋण होगा।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1: निम्न विन्दु-युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात करिये—

(*i*) $(-2, 3), (4, -5)$

(*ii*) $(a\cos\alpha, a\sin\alpha), (a\cos\beta, a\sin\beta)$

क्रिया : (*i*) मान लो अभीष्ट दूरी d है।

यहां $x_1=-2, x_2=4$

$y_1=3; \quad y_2=-5$

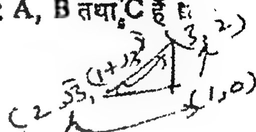
$$\therefore \quad d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$
$$=(-2-4)^2+\{3-(-5)\}^2$$
$$=6^2+8^2=36+64$$
$$=100$$
$$\therefore \quad d=10$$ उत्तर

(*ii*) मान लो बिन्दु A तथा B के निर्देशांक $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ तथा $(a\cos\beta, a\sin\beta)$ हैं।

तब
$$AB^2=(a\cos\alpha-a\cos\beta)^2+(a\sin\alpha-a\sin\beta)^2$$
$$=a^2(\cos\alpha-\cos\beta)^2+a^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=a^2\left\{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right\}^2$$
$$+a^2\left\{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right\}^2$$
$$=4a^2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left\{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}$$
$$=4a^2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\times 1$$
$$\therefore AB=2a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$ उत्तर

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि विन्दु (3, 2), (1, 0) तथा $(2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ एक सम वाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

क्रिया : मान लो दिये हुए निर्देशांकों वाले विन्दु क्रमशः A, B तथा C हैं।
इनसे त्रिभुज ABC बनता है।



तब $AB^2=(3-1)^2+(2-0)^2$
$=4+4=8$

फिर $BC^2=[\{(2-\sqrt{3})-1\}^2+\{(1+\sqrt{3})-0\}^2]$
$=(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2$
$=2(1+3)=8$

तथा $CA^2=[\{3-(2-\sqrt{3})\}^2+\{2-(1+\sqrt{3})\}^2]$
$=[(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2]$
$=2(1+3)=8$

इस प्रकार $AB=BC=CA=2\sqrt{2}$

अतः दिए हुए विन्दु एक समवाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि विन्दु (2, 1), (5, 4) तथा (6, 5) एक ही सरल रेखा पर स्थित हैं।

क्रिया : मान लो दिए हुए निर्देशांकों वाले विन्दु क्रमशः A, B तथा C है।

तब $AB=\sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}$
$=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{(5-6)^2+(4-5)^2}$
$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

और $AC=\sqrt{(6-2)^2+(5-1)^2}$
$=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore AB+BC=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
$=AC$

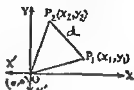
यह तब ही सम्भव है जब A, B तथा C एक ही सरल रेखा पर स्थित हों।

उदाहरण 4. यदि O मूल बिन्दु हो और $P_1(x_1, y_1)$ तथा $P_2(x_2, y_2)$ कोई से दिये हुए बिन्दु हों तो सिद्ध करो कि

$$OP_1 \times OP_2 \times \cos \angle P_1OP_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$ [राज., 61]

क्रिया : त्रिकोणमिति से हम जानते हैं कि

$$P_1P_2^2 = OP_1^2 + OP_2^2 - 2OP_1 \times OP_2 \times \cos \angle P_1OP_2$$



$$\therefore 2OP_1 \times OP_2 \times \cos \angle P_1OP_2$$

$$= OP_1^2 + OP_2^2 - P_1P_2^2$$

चित्र नं. 6

$$= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - \{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2^2$$

$$= 2x_1x_2 + 2y_1y_2$$

$$\therefore OP_1 \times OP_2 \times \cos \angle P_1OP_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

प्रश्नावली 1 (a)

1. निम्न निर्देशांकों वाले बिन्दुओं को लेखाचित्र में अंकित करिये :
$(4,7)$; $(-3,5)$; $(-2,6)$; $(5,-8)$; $(3,0)$; $(0,-4)$

2. एक वर्ग की भुजा a है। उसके एक शीर्ष को मूल बिन्दु मानकर शेष शीर्षों तथा उसके केन्द्र के निर्देशांक बताओ जबकि वर्ग प्रथम पाद में स्थित हो।

3. किसी समकोण त्रिभुज की भुजायें a तथा b हैं। एक उचित शीर्ष को मूल बिन्दु मानकर उसके शेष शीर्षों तथा कर्ण के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो जबकि त्रिभुज प्रथम पाद में स्थित हो।

4. एक आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 6 तथा 4 है। इस आयत की भुजाओं की लम्बाई तथा चौड़ाई के समान्तर तथा इसके केन्द्र में होकर जाने वाली दो रेखाओं को x तथा y निर्देश अक्ष मानकर आयत के शीर्षों के निर्देशांक बताओ।

5. निम्न बिन्दु-युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात करिये :
(i) $(2,1)$, $(10,7)$; (ii) $(5,-3)$, $(-4,1)$
(iii) $(-3,-2)$, $(0,5)$; (iv) $(a,-b)$, $(b,-a)$

6. निम्न विन्दुओं की मूल विन्दु से दूरी ज्ञात करिये :
(12,5); (−2,3); (−4,−1); $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$
$(a \cos \phi, b \sin \phi)$

7. सिद्ध करो कि विन्दु (0,−1), (2, 1), (0, 3) तथा (−2, 1) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

8. सिद्ध करो कि विन्दुओं (0, 9), (5, −3) तथा (−7, 2) से एक समद्विवाहु त्रिभुज वनता है।

9. सिद्ध करो कि विन्दु (−2, −1), (−1, 1), (5, −2) तथा (4, −4) एक आयत के शीर्ष हैं। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. प्रदर्शित करो कि विन्दु (1, 1), (−1, −1) तथा $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ एक समवाहु त्रिभुज वनाते हैं।

11. एक त्रिभुज के शीर्ष विन्दु (3, 2), (1, −1), (2, 4) हैं। इसका परिमाप (perimeter) ज्ञात करो।

12. सिद्ध करो कि बिन्दु (2, 1), (5, 4), (4, 7) तथा (1, 4) एक समान्तर चतुर्भुज वनाते हैं।

13. सिद्ध करो कि विन्दु (2, 1), (5, 4) तथा (6, 5) एक ही सरल रेखा पर हैं।

14. एक वर्ग के दो सम्मुख शीर्षों के निर्देशांक (5, −4) तथा (−3, 2) हैं। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

15. यदि विन्दु (x, y) दो विन्दुओं (a, b) तथा (b, a) से समान दूरी पर हों तो सिद्ध करो कि $x = y$.

16. यदि किसी विन्दु की दूरी विन्दु (4,3) से $\sqrt{10}$ है और उस विन्दु की कोटि उसके भुज की दुगुनी है तो उस विन्दु के निर्देशांक ज्ञात करिये।

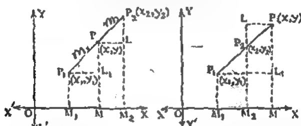
17. विन्दु (3, 2) तथा (−3, 2) एक समवाहु त्रिभुज के दो शीर्ष हैं और मूल विन्दु त्रिभुज के अन्दर स्थित है। इसके तृतीय शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात करिये।

18. एक रेखा की लम्बाई 10 तथा इसका एक सिरा बिन्दु $(2, -3)$ पर है। यदि इसके दूसरे सिरे का भुज 10 हो तो सिद्ध करो कि इसकी कोटि 3 अथवा -9 होगी।

19. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करिये जो तीनों बिन्दुओं $(9, 7)$, $(-8, 14)$ तथा $(-3, -11)$ से समान दूरी पर है।

20. $(4,6)$, $(0,4)$ तथा $(6,2)$ शीर्षों वाले त्रिभुज का परिगत केन्द्र (Circum-centre) और परिगत त्रिज्या (Circum-radius) ज्ञात करिये।

1·5. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना जो दिए हुए बिन्दुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को एक दिए हुए अनुपात $m_1 : m_2$ (जहाँ m_1 तथा m_2 धन संख्याएँ हैं) में विभक्त करता है।



चित्र 7 (अ) चित्र 7 (ब)

मान लो (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) निर्देशांक वाले बिन्दु क्रमशः P_1 तथा P_2 हैं तथा अभीष्ट बिन्दु P है और उसके निर्देशांक (x, y) हैं जिससे

$$\frac{P_1P}{P_2P} = \frac{m_1}{m_2}$$

OX पर लम्ब P_1M_1, PM, P_2M_2 खींचो।

तब समरूप त्रिभुज P_1L_1P तथा PLP_2 से

$$\frac{P_1L_1}{PL} = \frac{PL_1}{P_2L} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m_1}{m_2} \qquad \text{.......(1)}$$

[अव]स्था I—जब विन्दु P रेखा P_1P_2 को $m_1 : m_2$ के अनुपात में [वि]भाजन करता है।

[त]ब चित्र 7 (अ) द्वारा

$$P_1L_1 = M_1M = OM - OM_1 = x - x_1$$

$$PL = M_2M = OM_2 - OM = x_2 - x$$

तथा $$PL_1 = PM - L_1M = y - y_1$$

और $$P_2L = P_2M_2 - LM_2 = y_2 - y$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m_1}{m_2}$$

वज्रगुणन से $$m_2(x - x_1) = m_1(x_2 - x)$$

पक्षान्तरण द्वारा $$x(m_1 + m_2) = m_1x_2 + m_2x_1$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}}$$

फिर $$m_2(y - y_1) = m_1(y_2 - y)$$

अर्थात $$y(m_1 + m_2) = m_1y_2 + m_2y_1$$

$$\therefore \quad \boxed{y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}}$$

अवस्था II—जब विन्दु P रेखा P_1P_2 को $m_1 : m_2$ अनुपात में बाह्य विभाजन करता है।

तब चित्र 7 (ब) द्वारा

$P_1L_1 = x - x_1$ तथा $LP = M_2M = x - x_2$

एवं $PL_1 = PM - L_1M = y - y_1$ तथा $P_2L = y - y_2$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर

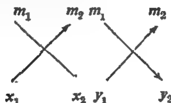
$$m_2(x - x_1) = m_1(x - x_2)$$

अथवा $$x(m_1 - m_2) = m_1x_2 - m_2x_1$$

अर्थात् $$\boxed{x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}}$$

इसी प्रकार $$y=\frac{m_1 y_2-m_2 y_1}{m_1-m_2}$$

x तथा y के मानों के अंशों को निम्न निर्दिष्ठ तिर्यक् गुणन की सहायता से स्मरण रखा जा सकता है।

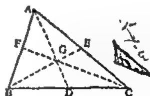


चित्र 8

उपसाध्य। (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ होते हैं।

1·51. त्रिभुज के केन्द्रक (centroid) के निर्देशांक ज्ञात करना जब कि इसके शीर्षों के निर्देशांक दिए हुए हों और इससे सिद्ध करना कि एक त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ (medians) एक ही बिन्दु पर मिलती हैं।

मान लो त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हैं। तथा भुजाएँ BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E, F हैं। मानलो त्रिभुज के केन्द्रक G के निर्देशांक $(\bar{x}, \bar{y})$ हैं।



चित्र 9

BC के मध्य बिन्दु D के निर्देशांक $[\frac{1}{2}(x_2+x_3), \frac{1}{2}(y_2+y_3)]$ हैं। समतल ज्यामिति द्वारा हम जानते हैं कि त्रिभुज का केन्द्रक प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अब AD को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करने वाले विन्दु G के निर्देशांक हैं—

$$\bar{x}=\frac{2\times\frac{1}{2}(x_2+x_3)+1\times x_1}{2+1}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$$

$$\bar{y}=\frac{2\times\frac{1}{2}(y_2+y_3)+1\times y_1}{2+1}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

अतः केन्द्रक के अभीष्ट निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \text{ हैं।}$$

इससे हम देखते हैं कि केन्द्रक के निर्देशांक x_1, x_2, x_3 तथा y_1, y_2, y_3 में सममित (symmetrical) हैं। अतः यह विन्दु G प्रत्येक माध्यिका पर स्थित है अर्थात् तीनों माध्यिकाएं इस विन्दु पर परस्पर मिलती है। इस प्रकार सिद्ध होता है कि किसी त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ संगामी (concurrent) होती हैं।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. उन विन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करो जो विन्दुओं (3,4) तथा (5,—2) को मिलाने वाली रेखा को 3 : 2 के अनुपात में अन्तः विभाजन तथा वाह्य विभाजन करते हैं।

क्रिया : मान लो अन्तः विभाजन व वाह्यविभाजन करने वाले विन्दु क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हैं।

तब ऊपर प्रतिपादित किये हुए सूत्रों द्वारा

$$x_1=\frac{3\times5+2\times3}{3+2}=\frac{21}{5},\quad y_1=\frac{3\times(-2)+2\times4}{3+2}=\frac{2}{5}$$

तथा $$x_2=\frac{3\times5-(2\times3)}{3-2}=9,\ y_2=\frac{3\times(-2)-(2\times4)}{3-2}=-14$$

इस प्रकार अभीष्ट विन्दुओं के निर्देशांक $\left(\frac{21}{5}, \frac{2}{5}\right)$ तथा (9,—14) हैं।

उदाहरण 2. बिन्दुओ $(3, -4)$ और $(-5, 6)$ को मिलाने वाली रेखा किस अनुपात में (*i*) x—अक्ष (*ii*) y— अक्ष द्वारा विभाजित होती है।

क्रिया : मान लो अभीष्ट अनुपात $m_1 : m_2$ है तथा विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशाक $(\bar{x}, \bar{y})$ है।

अब (*i*)मे विभाजित करने वाले बिन्दुका y-निर्देशांक शून्य होगा अर्थात् $\bar{y}=0$

अतः $m_1 \times 6 + m_2 \times (-4) = 0$

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{6}$$

जिससे $m_1 : m_2 = 2 : 3$

(*ii*) यहाँ विभाजित करने वाले विन्दु का x-निर्देशांक शून्य होगा अर्थात् $\bar{x}=0$

$$\therefore m_1 \times (-5) + m_2 \times 3 = 0$$

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{5}$$

अतः $m_1 : m_2 = 3 : 5$

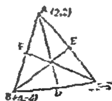
उदाहरण 3. यदि विन्दुओं A, B, C के निर्देशांक क्रमशः $(2, 2)$, $(-4, -4)$ तथा $(5, -8)$ हों तो त्रिभुज ABC की माध्यिकाओं की लम्बाई ज्ञात करो।

क्रिया : यहाँ भुजा BC, CA तथा AB के मध्य विन्दुओं D, E, F के निर्देशांक क्रमशः निम्न हैं :

$$\left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-4-8}{2}\right),$$

$$\left(\frac{5+2}{2}, \frac{-8+2}{2}\right)$$

तथा $\left(\frac{2-4}{2}, \frac{2-4}{2}\right)$



अर्थात् $\left(\frac{1}{2}, -6\right)$, $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$ तथा $(-1, -1)$

$\therefore$ माध्यिका $AD = \sqrt{(2-\frac{1}{2})^2+(2+6)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{9+256} = \frac{1}{2}\sqrt{265}$

$BE = \sqrt{(\frac{7}{2}+4)^2+(-3+4)^2}$

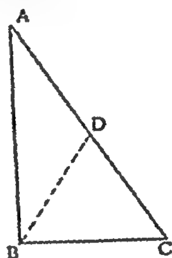
$= \frac{1}{2}\sqrt{225+4} = \frac{1}{2}\sqrt{229}$

और $CF = \sqrt{(5+1)^2+(-8+1)^2}$

$= \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$

उदाहरण 4. वैश्लेषिक ज्यामिति की विधि से सिद्ध करो कि एक समकोण त्रिभुज में कर्ण उसकी माध्यिका का दो गुना होता है।

क्रिया : मान लो त्रिभुज ABC में कोण B समकोण है। यहाँ हम सरलता व सुविधा की दृष्टि से शीर्ष B को मूल विन्दु, भुजा BC को x-अक्ष तथा भुजा BA को y-अक्ष मान लें।



चित्र 11

मान लो C के निर्देशांक $(a, 0)$ तथा A के निर्देशांक $(0, c)$ हैं।

तब कर्ण $AC = \sqrt{(a-0)^2+(0-c)^2}$

$= \sqrt{a^2+c^2}$

फिर कर्ण AC के मध्य विन्दु (मान लो D) के निर्देशांक हैं—

$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$ अर्थात $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$\therefore$ माध्यिका $BD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}$

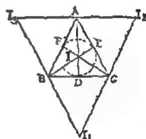
$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि कर्ण AC इसकी माध्यिका BD का दो गुना है।

टिप्पणी : उपरोक्त क्रिया से विद्यार्थी देखेंगे कि समतल ज्यामिति की विधि की अपेक्षा वैश्लेषिक (अथवा निर्देशांक) ज्यामिति की विधि सरल तथा संक्षिप्त होती है।

1·6. यदि एक त्रिभुज के शीर्षों A, B, C के निर्देशांक (x_1, y_1), (x_2, y_2), तथा (x_3, y_3) हों तो उसके अन्तःकेन्द्र (in-centre) तथा बहिर्केन्द्रों (ex-centres) के निर्देशांक ज्ञात करना।

अन्तः केन्द्र—हम समतल ज्यामिति द्वारा जानते हैं कि त्रिभुज का अन्तःकेन्द्र उसके तीनों कोणों के आन्तरिक अर्धकों (internal-bisectors) का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है।



चित्र 12

मानलो कोण A तथा B के अर्धक AD तथा BE परस्पर बिन्दु I पर मिलते हैं।

अब रेखा AD भुजा BC को अनुपात AB : AC अर्थात् $c : b$ में विभाजित करती है। अतः बिन्दु D के निर्देशांक हैं—

$$\left(\frac{cx_3+bx_2}{c+b}, \frac{cy_3+by_2}{c+b}\right)$$

फिर क्योंकि $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$, $\frac{BD+DC}{DC}=\frac{c+b}{b}$

अतः $\frac{a}{DC}=\frac{c+b}{b}$ जिससे $DC=\frac{ab}{c+b}$

अब त्रिभुज ACD में रेखा CI कोण C का आन्तरिक अर्धक है।

$$\text{अतः } \frac{AI}{ID}=\frac{AC}{CD}=\frac{b}{\frac{ab}{b+c}}=\frac{b+c}{a}$$

∴ विन्दु I, A तथा D को मिलाने वाली रेखा AD को अनुपात $b+c : a$ में विभक्त करता है।

अतः I के निर्देशांक हैं

$$\left[\frac{(b+c)\times\frac{cx_3+bx_2}{c+b}+ax_1}{a+b+c}, \frac{(b+c)\times\frac{cy_3+by_2}{c+b}+ay_1}{a+b+c}\right]$$

अर्थात् $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

इन निर्देशांकों की सममिति से स्पष्टतया प्रतीत होता है कि बिन्दु I न केवल कोण A के अर्धक पर है अपितु यह कोण B तथा C के अर्धक पर भी होगा। अतः I कोण A, B, C तीनों के अर्धकों का प्रतिच्छेद बिन्दु है अर्थात् यही अन्तःकेन्द्र है तथा इसके निर्देशांक हैं :

$$\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$$

वहिष्केन्द्र : मान लो कोण A के सम्मुख वाले वहिर्वृत्त का केन्द्र I_1 है तब I_1B तथा I_1C क्रमशः वहिष्कोण B तथा C के अर्धक होंगे।

$$\frac{AI_1}{DI_1}=\frac{AC}{CD}=\frac{b}{\frac{ab}{b+c}}=\frac{b+c}{a}$$

अर्थात् विन्दु I_1 रेखा AD को वाह्यरूप से अनुपात $b+c : a$ में विभक्त करता है।

अतः I_1 के निर्देशांक हैं :

$$\left[\frac{(b+c)\times\frac{cx_3+bx_2}{c+b}-ax_1}{b+c-a}, \frac{(b+c)\times\frac{cy_3+by_2}{c+b}-ay_1}{b+c-a}\right]$$

अर्थात् $\left(\frac{-ax_1+bx_2+cx_3}{-a+b+c}, \frac{-ay_1+by_2+cy_3}{-a+b+c}\right)$

इसी प्रकार अन्य वहिष्केन्द्रों के निर्देशांक ज्ञात किए जा सकते हैं। शीर्ष B तथा C के सम्मुख वाले वहिष्केन्द्रों के निर्देशांक क्रमशः होंगे—

$$\left(\frac{ax_1 - bx_2 + cx_3}{a-b+c},\ \frac{ay_1 - by_2 + cy_3}{a-b+c}\right)$$

तथा $$\left(\frac{ax_1 + bx_2 - cx_3}{a+b-c},\ \frac{ay_1 + by_2 - cy_3}{a+b-c}\right)$$

उदाहरण—किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $(6, 0)$, $(0, 6)$ और $(7, 7)$ हैं। इसके तीनों वहिष्केन्द्रों तथा अन्तः केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात करो।

क्रिया : मान लो त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B, C के निर्देशांक क्रमशः $(6, 0)$, $(0, 6)$ और $(7, 7)$ हैं जिससे

भुजा $a = BC = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$

$b = CA = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$

तथा $c = AB = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

अतः प्रथम शीर्ष के सम्मुख वाले वहिष्केन्द्र के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{-5\sqrt{2}\times 6 + 5\sqrt{2}\times 0 + 6\sqrt{2}\times 7}{-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}},\ \frac{-5\sqrt{2}\times 0 + 5\sqrt{2}\times 6 + 6\sqrt{2}\times 7}{-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}\right)$$

अर्थात् $(2, 12)$

द्वितीय शीर्ष के सम्मुख वाले वहिष्केन्द्र के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{5\sqrt{2}\times 6 - 5\sqrt{2}\times 0 + 6\sqrt{2}\times 7}{5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}},\ \frac{5\sqrt{2}\times 0 - 5\sqrt{2}\times 6 + 6\sqrt{2}\times 7}{5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}\right)$$

अर्थात् $(12, 2)$

...तीय शीर्ष के सम्मुख वाले बहिष्केन्द्र के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{5\sqrt{2}\times6+5\sqrt{2}\times0-6\sqrt{2}\times7}{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}}, \frac{5\sqrt{2}\times0+5\sqrt{2}\times6-6\sqrt{2}\times7}{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}}\right)$$

अर्थात $(-3,-3)$

तथा त्रिभुज के अन्तः केन्द्र के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{5\sqrt{2}\times6+5\sqrt{2}\times0+6\sqrt{2}\times7}{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}}, \frac{5\sqrt{2}\times0+5\sqrt{2}\times6+6\sqrt{2}\times7}{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}}\right)$$

अर्थात $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

प्रश्नावली 1 (b)

उस विन्दु के निर्देशांक ज्ञात करिये जो निम्न विन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को अन्तः व वाह्य विभाजन दिये हुए अनुपात में करता है। (प्रश्न 1 व 2)

1. $(7,-1)$ और $(4, 5)$ को $2:1$ में।
2. $(3,-4)$ और $(-2, 5)$ को $5:3$ में।
3. वह अनुपात ज्ञात करो जिसमें विन्दु $\left(\frac{16}{5}, 1\right)$ विन्दुओं $(5,-2)$ तथ... $(2, 3)$ को मिलाने वाली रेखा को विभाजित करता है।
4. विन्दुओं $(3, 4)$ तथा $(7, 11)$ को मिलाने वाली रेखा को विन्दु $(11, 1$... किस अनुपात में विभाजित करता है?
5. विन्दुओं $(2,-3)$ तथा $(5, 6)$ को मिलाने वाली रेखा किस अनुपा... (i) $x-$अक्ष (ii) $y-$अक्ष द्वारा विभाजित होती है?

6. बिन्दुओं $(3, -4)$ और $(-5, 2)$ को मिलाने वाली रेखा तीन समान भागों में विभक्त की जाती है। इसके विभाजन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करो।
7. बिन्दुओं $(-6, 8)$ तथा $(8, -6)$ को मिलाने वाली रेखा चार समान भागों में विभक्त की जाती है। इसके विभाजन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करो।

निम्न शीर्षों वाले त्रिभुजों के केन्द्रक ज्ञात करो। (प्र. 8 व 9)

8. $(-4, 6)$, $(2, -2)$ और $(2, 5)$ [राज., 62]
9. $(3, 0)$, $(5, 2)$ और $(4, -5)$
10. एक त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $(0, -1)$, $(2, 1)$, तथा $(0, 3)$ हैं। इसकी माध्यिकाओं की लम्बाई ज्ञात करो।
11. सिद्ध करो कि बिन्दु $(2, 3)$ को बिन्दु $(3, 4)$ से मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक समीकरण $x - y + 1 = 0$ को संतुष्ट करते हैं।
12. उस त्रिभुज के अन्त. केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात करो जिसके शीर्षों के निर्देशांक $(-3, -2)$, $(1, 1)$, $(3, 6$ हैं।
13. एक त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $(2, -2)$, $(8, -2)$ और $(8, 6)$ हैं। इसके अन्तःकेन्द्र तथा तीनों बहिष्केन्द्रों के निर्देशांक ज्ञात करो।
14. सिद्ध करो कि बिन्दु $(-2, -1)$, $(1, 0)$, $(4, 3)$ और $(1, 2)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

    (टिप्पणी—दोनों विकर्णों का मध्य बिन्दु एक ही है)
15. प्रदर्शित करो कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण का मध्य बिन्दु इसके तीनों शीर्षों से समान दूरी पर है।
16. त्रिभुज ABC में वैश्लेषिक ज्यामिति द्वारा सिद्ध करो कि $AB^2 + AC^2 = 2\ (AD^2 + DC^2)$ जहाँ D, भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

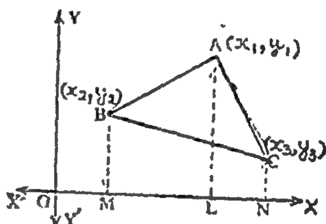
17. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य विन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा की आधी होती है।

18. सिद्ध करो कि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य विन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ और उसके कर्णों के मध्य विन्दुओं को मिलाने वाली रेखा एक विन्दु पर मिलती हैं तथा परस्पर समद्विभाजित होती हैं।

1·7. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जब उसके शीर्षों के निर्देशांक दिए हुए हों।

मान लो त्रिभुज ABC है तथा उसके शीर्षों A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) है।

A, B, C से x-अक्ष पर लम्ब क्रमशः AL, BM, CN डालो।



चित्र 13

तब $\triangle ABC$ = समलम्ब ABML + समलम्ब ALNC − समलम्ब BMNC

$$= \tfrac{1}{2}\,ML\,(BM + AL) + \tfrac{1}{2}\,LN\,(AL + CN) - \tfrac{1}{2}\,MN\,(BM + CN)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(x_1 - x_2)\,(y_1 + y_2) + \tfrac{1}{2}\,(x_3 - x_1)\,(y_1 + y_3) - \tfrac{1}{2}\,(x_3 - x_2)\,(y_2 + y_3)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[y_2\{(x_1 - x_2) - (x_3 - x_2)\} + y_3\{(x_3 - x_1) - (x_3 - x_2)\} + y_1\{(x_1 - x_2) + (x_3 - x_1)\}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\{y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1) + y_1(x_3 - x_2)\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\} \quad \text{....(1)}$$

अथवा $\boxed{\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}}$ ....(2)

त्रिभुज के क्षेत्रफल को व्यक्त करने वाले व्यंजक के दो रूपों (1) अथवा (2) में से किसी भी एक को स्मरण रखा जा सकता है। दोनों ही रूप चक्रीय क्रम (cyclic order) में होने के कारण सरलता से स्मरण रखे जा सकते हैं। इस त्रिभुज के क्षेत्रफल को सारिणिक (Determinant) के रूप में लिखा जा सकता है यथा

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

उपसाध्य 1. उस त्रिभुज का जिसका एक शीर्ष मूल बिन्दु (0, 0) हो तथा अन्य शीर्ष (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हो, क्षेत्रफल
$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ होगा।

उपसाध्य 2. यदि तीन बिन्दु (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) समरेख हों तो उनसे कोई वास्तविक त्रिभुज नहीं बनेगा अर्थात् उनसे निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

अतः इन तीन बिन्दुओं के समरेख होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध निम्न है

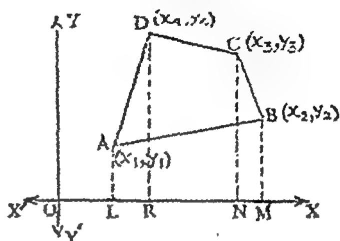
$$(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) = 0$$

अथवा
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1·71 क्षेत्रफल का चिन्ह—यदि उपरोक्त सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल एक ऋणात्मक राशि के रूप में प्राप्त हो तो भी उसके चिन्ह का ध्यान न रखकर हम उसके संख्यात्मक मान को ही लेते हैं क्योंकि किसी भी त्रिभुज का क्षेत्रफल आवश्यक रूप से एक धनात्मक राशि ही होता है।

1·8. किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जब उसके शीर्षों के निर्देशांक दिए हुए हों।

मान लो चतुर्भुज के शीर्ष A,B,C,D के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) तथा (x_4, y_4) हैं। A,B,C,D से x-अक्ष पर लम्ब AL, BM, CN तथा DR डालो।



चित्र 14

तब चतुर्भुज ABCD = समलम्ब ALRD + समलम्ब DRNC + समलम्ब CNMB − समलम्ब ALMB

$$= \tfrac{1}{2}LR(AL+DR) + \tfrac{1}{2}RN(DR+CN) + \tfrac{1}{2}NM(CN+BM) - \tfrac{1}{2}LM(AL+BM)$$

$$= \tfrac{1}{2}(x_4-x_1)(y_1+y_4) + \tfrac{1}{2}(x_3-x_4)(y_4+y_3) + \tfrac{1}{2}(x_2-x_3)\times(y_3+y_2) - \tfrac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1+y_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)\}$$

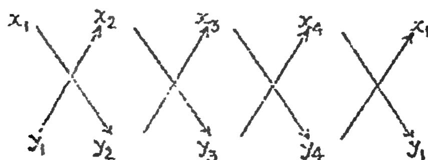
अन्य विधि—उपरोक्त सूत्र चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में विभक्त करके भी प्राप्त किया जा सकता है यथा

चतुर्भुज ABCD = $\triangle$ABD + $\triangle$BCD

$$= \tfrac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_4-x_4y_2)+(x_4y_1-x_1y_4) + (x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_4y_3)+(x_4y_2-x_2y_4)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)]$$

टिप्पणी—अनुच्छेद 1·7 तथा 1·8 में प्रतिपादित क्षेत्रफल के सूत्रों को स्मरण रखने की विधि इस प्रकार है :



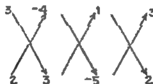
चित्र 15

शीर्षों के भुजों को क्रमशः एक पंक्ति में रखो। इसके नीचे दूसरी पंक्ति में शीर्षों की कोटियों को भी क्रमशः रखो। दोनों पंक्तियों के अन्त में प्रथम भुज व कोटि को दुहराओ। फिर तीर से निर्दिष्ट अवयवों के गुणनफल बनाओ, ऊपर से नीचे आने वाले तीरों के संगत गुणनफलों को धन तथा नीचे से ऊपर जाने वाले तीरों के संगत गुणनफलों को ऋण रखो। इस प्रकार प्राप्त गुणनफलों के योग को $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर चित्र का अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात होता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके शीर्ष $(3,2)$, $(-4,3)$ तथा $(1,-5)$ हैं।

क्रिया : सूत्र के अनुसार



चित्र 16

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \tfrac{1}{2}[\{(3\times 3)-2\times(-4)\} + \{(-4)\times(-5)-(3\times 1)\}+\{(1\times 2)-3\times(-5)\}]$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(9+8)+(20-3)+(2+15)\}$$

$= \frac{51}{2} = 25\cdot5$ वर्ग इकाइयाँ।

उदाहरण 2. k का वह मान ज्ञात करो जिसके लिये बिन्दु $(k,\ 2-2k)$, $(-k+1,\ 2k)$ तथा $(-4-k,\ 6-2k)$ समरेख हैं।

क्रिया : दिए गए बिन्दुओं के समरेख होने के लिये इनसे निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होना चाहिए।

$$\therefore \tfrac{1}{2}[\{2k^2-(2-2k)(1-k)\}+\{(1-k)(6-2k) -2k(-4-k)\}+\{(-4-k)(2-2k)-k(6-2k)\}]=0$$

अथवा $k^2(2-2+2+2+2+2)+k(4-8+8+6-6)$
$-2+6-8=0$

$$8k^2+4k-4=0$$

अर्थात $\quad 2k^2+k-1=0$

अथवा $\quad 2k^2+2k-k-1=0$

जिससे $\quad (2k-1)(k+1)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ अथवा -1 उत्तर

उदाहरण 3. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके शीर्ष हैं : $(3, 2), (-4, -1), (5, -2), (1, -3)$ ।

क्रिया : शीर्षों के भुजों और कोटियों को प्रथम तथा द्वितीय पंक्तियों में रखने पर

$$\begin{matrix} 3 & -4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \end{matrix}$$

स्मरण विधि द्वारा चतुर्भुज का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$=\tfrac{1}{2}[\{3\times(-1)-2\times(-4)\}+\{(-4)\times(-2)-5\times(-1)\}$$
$$+\{5\times(-3)-1\times(-2)\}+\{(1\times2)-(-3)\times3]$$
$$=\tfrac{1}{2}[(-3+8)+(8+5)+(-15+2)+(2+9)]$$
$$=\tfrac{1}{2}(5+13-13+11)=8 \text{ वर्ग इकाइयाँ}$$ उत्तर

प्रश्नावली 1 (c)

उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करिये जिसके शीर्ष निम्न हैं :—

1. (*i*) $(1, 1), (3, 2), (4, 4)$
   (*ii*) $(2,-1), (3, 4), (-3, 5)$
   (*iii*) $(4, 1), (5, -2), (3, 7)$
   (*iv*) $(a\cos\alpha, b\sin\alpha), (a\cos\beta, b\sin\beta),$
   $(a\cos\gamma, b\sin\gamma)$

सिद्ध करो कि बिन्दु $(3, 2), (-1, 3), (-5, 4)$ समरेख हैं।

सिद्ध करो कि बिन्दु $(b, c+a), (c, a+b), (a, b+c)$ समरेख हैं।

k का वह मान ज्ञात करिये जिसके लिए बिन्दु
$(k+1, 2-k), (1-k, -k), (2+k, 3-k)$ एक रेखा में हों।

5. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करिये जिसके शीर्षों के निर्देशांक निम्नलिखित हैं :
   (*i*) $(2, 3)$ $(-5, -1), (4, -2)$ और $(-3, 1)$
   (*ii*) $(4, -3), (1, 2), (6, -1)$ और $(2, 3)$
   (*iii*) $(-3, 1), (4, -4), (2, 6)$ और $(7, 1)$

6. यदि O किसी त्रिभुज ABC का गुरुत्व केन्द्र हो तो वैश्लेषिक विधि से सिद्ध करो कि त्रिभुज BCO, CAO और ABO क्षेत्रफल में समान हैं।

7. सिद्ध करो कि बिन्दु A $(-2, 5)$, B $(4, -1)$, C $(9, 1)$ तथा D $(3, 7)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं। वह बिन्दु E ज्ञात करो जो AC को $1 : 2$ की निष्पत्ति में विभक्त करता है। यह भी सिद्ध करो कि D, E तथा AB का मध्य बिन्दु एक ही रेखा पर हैं।
   [राज., 50]

8. A, B, C, तीन समरेख बिन्दु हैं। A तथा B के निर्देशांक $(2, 3)$ और $(5, 4)$ हैं तथा $AC = 2\sqrt{10}$, तो C के निर्देशांक ज्ञात करो।

9. सिद्ध करो कि बिन्दु $(1, 0), (0, 1)$ तथा $(-3, 4)$ एक ही रेखा पर स्थित हैं।

10. यदि बिन्दु $(x, y), (3, 2)$ और $(1, 3)$ समरेख हों तो सिद्ध करिए कि
$$x+2y-7=0$$

0]

11. यदि बिन्दु $(a, 0)$, $(0, b)$ और $(1, 1)$ समरेख हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

12. A और B दो बिन्दु (3, 4) और (5, —2) है। बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात करिए जबकि PA=PB और △PAB=10.

13. बिन्दु A, B, C क्रमशः (—1, 5), (3, 1) और (5, 7) हैं; D, E और F क्रमशः BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध करो कि

$$\triangle ABC=4\ \triangle DEF$$

14. बिन्दु A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (6, 3), (—3, 5) और (4, —2) है। और P बिन्दु (x, y) है। सिद्ध करो कि

$$\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}=\frac{x+y-2}{7}$$

[राज., 70]

15 वह प्रतिबन्ध ज्ञात करो जिससे बिन्दु (a, b), (c, d) तथा $(a-c, b-d)$ समरेख है।

16. P, Q तथा R तीन समरेख बिन्दु हैं। P और Q क्रमशः (3, 4 और (7, 7) है तथा PR 10 इकाई के बराबर है। R के निर्देशांक ज्ञात करिए।

[राज., 71

प्रश्नावली 1 (d)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में चार उत्तर (A), (B), (C) व (D) हुए हैं। इनमें केवल एक ही सही उत्तर है; उसका संकेतात्मक अक्षर दिए हुए कोष्ठक में लिखिए—

1. बिन्दु (—4, 5) स्थित है—
   (A) प्रथम पाद में (B) द्वितीय पाद में
   (C) तृतीय पाद में (D) चतुर्थ पाद में

2. बिन्दु (2, 3) की x-अक्ष से दूरी है—
   (A) 2 (B) 5 (C) 3 (D) 1

3. विन्दु (3, −4) की y-अक्ष से दूरी है—
   (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 ( )
4. विन्दु (9, 12) की मूल बिन्दु से दूरी है—
   (A) 3 (B) 15 (C) 9 (D) 21 ( )
5. विन्दु (4, −7) और (−1,5) के बीच की दूरी है—
   (A) 5 (B) 17 (C) $\sqrt{13}$ (D) 13 ( )
6. विन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को 1 : 2 के अनुपात में अन्तर्विभाजन करने वाले विन्दु के निर्देशांक हैं—
   (A) $\{\frac{1}{3}(x_1+2x_2), \frac{1}{3}(y_1+2y_2)\}$
   (B) $\{\frac{1}{3}(2x_1+x_2), \frac{1}{3}(2y_1+y_2)\}$
   (C) $\{\frac{1}{3}(x_1+x_2), \frac{1}{3}(y_1+y_2)\}$
   (D) $\{\frac{1}{3}(2x_1-x_2), \frac{1}{3}(2y_1-y_2)\}$ ( )
7. विन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में वाह्य विभाजित करने वाले विन्दु के निर्देशांक हैं—
   (A) $\left(\frac{m_1x_1-m_2x_2}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_1-m_2y_2}{m_1-m_2}\right)$
   (B) $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$
   (C) $\left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$
   (D) $\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)$
8. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हों तो इसके केन्द्रक के निर्देशांक होंगे:—
   (A) $\{\frac{1}{6}(x_1+2x_2+3x_3), \frac{1}{6}(y_1+2y_2+3y_3)\}$
   (B) $\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$

(C) $\{ \frac{1}{3} (x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3} (y_1+y_2+y_3) \}$

(D) $(x_1+x_2+x_3, \; y_1+y_2+y_3)$

. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष विन्दु (2, −2), (8, −2) और (8, 6) हों त
उसके अन्तः केन्द्र के निर्देशांक होंगे—

(A) (2, 2) (B) (18, 2)
(C) (14, 6) (D) (6, 0)

10. विन्दु (0, 0), (4, 0) तथा (0, 8) द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल है— ( )
(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32

11. विन्दु (2, 3), (4, 5) तथा (−6, −2) से निर्मित त्रिभुज क. क्षेत्रफल होगा— ( )
(A) 3 (B) 6 (C) 17 (D) 34

12. a के निम्न मान के लिए विन्दु समूह (0,1), (a,2) तथा (−2, −1) समरेख हैं— ( )
(A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 5 (D) 1

विविध प्रश्नावली 1 (e)

(राजस्थान बोर्ड की परीक्षा के प्रश्न)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. P (0, 0), Q (a, b) तथा R (c, d) से बनने वाले त्रिभु क्षेत्रफल कितना होगा। [19
(.........

2. एक रेखा का एक सिरा (4, 0) है और मध्य बिन्दु (4, 1) है के दूसरे सिरे के निर्देशांक क्या होंगे ? [
(.........

3. विन्दु (12, 9) की मूल विन्दु से दूरी होगी—
(A) 1 (B) 9 (C) 12 (D) 15

4. बिन्दु $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा— [1968]
   (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 ( )
5. बिन्दु $(1, 2)$ तथा $(6, 7)$ को मिलाने वाली सरल रेखा को बिन्दु $(3, 4)$ किस अनुपात में विभाजित करता है। [1968]
   (..................)
6. बिन्दु $(3, 4)$ की x-अक्ष से दूरी होगी— [1969]
   (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 ( )
7. बिन्दु $(0,0)$ तथा $(-1,2)$ के बीच की दूरी का वर्ग होगा–[1969]
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 9 ( )
8. बिन्दु $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 4)$ द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा — [1969]
   (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 ( )
9. एक त्रिभुज के शीर्ष $(4, -6)$, $(3, -2)$ और $(2, -5)$ हैं; इसके केन्द्रक (centroid) के निर्देशांक ज्ञात करिये— [1969]
   (..................)
10. बिन्दु $(3, 4)$ की y-अक्ष से दूरी होगी— [1970]
    (A) 7 (B) 4 (C) 3 (D) 1 ( )
11. जो बिन्दु $(0, 0)$, $(2, 0)$ तथा $(0, 2)$ बिन्दुओं से समान दूरी पर है वह होगा— [1970]
    (A) $(1, 2)$ (B) $(2,1)$ (C) $(1, 1)$ (D) $(2,2)$ ( )
12. एक वर्ग के सम्मुख शीर्ष $(5, -4)$ तथा $(-3, 2)$ हैं। इसके विकर्ण की लम्बाई ज्ञात करो। [1970]
    (..................)

बिन्दु $(-2, 5)$ और $(7, 1)$ को मिलाने वाली सरल रेखा को $3:2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु का x-निर्देशांक होगा— [1970]

(A) $\frac{3\times7+2\times(-2)}{3+2}$ (B) $\frac{3\times(-2)+2\times7}{3+2}$

(C) $\frac{3\times7-2\times(-2)}{3+2}$ (D) $\frac{3\times(-2)-2\times7}{3+2}$ ( )

14. दो बिन्दु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को जोड़ने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में वहिर्विभाजन करने वाले बिन्दु का x-निर्देशांक होगा— [1971]

(A) $\frac{m_1x_1-m_2x_2}{m_1-m_2}$ (B) $\frac{m_1x_1-m_2x_2}{m_2-m_1}$

(C) $\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_2-m_1}$ (D) $\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}$ ( )

15. यदि बिन्दु $(0, 0)$, $(4, 2)$ और $(1, y)$ समरेख (collinear) हों तो y का मान होगा— [1971]

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) 4 ( )

16. एक आयत के शीर्ष बिन्दु क्रमशः $(0, 0)$ $(4, 0)$, $(4, 3)$ तथा $(0, 3)$ है। इसके विकर्ण की लम्बाई होगी— [1972]

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 ( )

17. बिन्दु $(5, 0)$ तथा $(0, 4)$ को मिलाने वाली रेखा को बिन्दु P, 2:3 के अनुपात में अन्तर्विभाजित करता है। P के निर्देशांक होंगे—[1972]

(A) $(3,\frac{8}{5})$ (B) $(2,\frac{12}{5})$ (C) $(1,\frac{4}{5})$ (D) $(\frac{5}{3},\frac{4}{3})$ (

18. किसी त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं के निर्देशांक $(0, 0)$, $(0, 2)$ और $(3, 1)$ हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [197

(....... ....

2

बिन्दुपथ तथा उसका समीकरण
(Locus and its equation)

2·0. बिन्दुपथ (Locus) परिभाषा:—यदि एक बिन्दु किसी दिए हुए नियम के अनुसार चलते हुए एक वक्र (curve) को अंकित करे तो उसके पथ को बिंदुपथ (locus) कहते हैं।

उदाहरणतः यदि एक समतल में कोई बिन्दु O स्थिर हो तथा एक गतिमान बिन्दु P इस नियम से चले कि उसकी O से दूरी सर्वदा 4 इकाई के बराबर रहे तो हम ज्यामिति से जानते हैं कि P का बिन्दुपथ एक वृत्त होगा जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या 4 इकाई है।

बिंदुपथ का समीकरण (Equation to the locus)—जो समीकरण किसी बिंदु से अंकित बिन्दुपथ पर स्थित प्रत्येक बिंदु के निर्देशांकों से संतुष्ट हो और बिंदुपथ पर स्थित न होने वाले किसी भी बिन्दु के निर्देशांकों से संतुष्ट न हो वह उस बिंदुपथ का समीकरण कहलाता है। इस प्रकार यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक किसी समीकरण को सन्तुष्ट करें तो वह बिन्दु उस समीकरण के संगति बिन्दुपथ पर स्थित होगा। हम गतिमान बिन्दु के निर्देशांकों को सर्वदा (x, y) मानेंगे। इन सामान्य निर्देशांकों (general coordinates) को गतिमान बिन्दु के चलित निर्देशांक (current co-ordinates) कहते हैं और बिन्दुपथ के समीकरण ज्ञात करने से हमारा तात्पर्य (x, y) में एक बीजीय सम्बन्ध ज्ञात करना होता है।

इस प्रकार किसी गतिमान बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करने के लिए हमें निम्न विधि का प्रयोग करना चाहिए।

(*i*) बिन्दुपथ पर किसी बिंदु के चलित निर्देशांक (x, y) मान लें।

(*ii*) वह नियम अथवा प्रतिबन्ध लिख लें जिसके अनुसार इस बिन्दु को

चलना है तथा इसकी सहायता से प्रश्न में प्रयोग आने वाली राशियों का मान ज्ञात कर लें।

(*iii*) दिए हुए प्रतिबन्ध का प्रयोग करके (x, y) में उचित सम्बन्ध ज्ञात कर अभीष्ट समीकरण प्राप्त कर लें।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. यदि एक विन्दु निर्देश अक्षों के समतल में इस प्रकार चले कि इसका भुज इसकी कोटि के तिगुने से सर्वदा 2 कम हो तो इसके विन्दुपथ का समीकरण $x=3y-2$ होगा। यह आगे प्रदर्शित किया जायेगा कि इस प्रकार का एकघाती समीकरण सर्वदा एक सरल रेखा को निरूपित करता है। यहाँ विन्दु $(1,1)$, $(4, 2)$, $(-5,-1)$ इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। अतः ये सब इस विन्दुपथ पर स्थित हैं।

उदाहरण 2. यदि एक विन्दु इस प्रकार अपने पथ पर अग्रसर हो कि इसकी दूरी एक दिये हुए विन्दु $(2, 3)$ से सर्वदा 5 रहती हो तो इस विन्दु के विन्दुपथ का समीकरण होगा

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$$

उदाहरण 3. उस विन्दु के विन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करो जिसकी विन्दु $(a, 0)$ तथा $(-a, 0)$ से दूरियों के वर्गों का योग एक अचर राशि $2r^2$ के तुल्य हो जहाँ $r>a$।

क्रिया : मान लो गतिमान विन्दु P के चलित निर्देशांक (x, y) है तथा दिए हुए विन्दु क्रमशः A तथा B हैं।

प्रश्न में दिए हुए प्रतिबन्ध के अनुसार

$$PA^2+PB^2=2r^2$$

अब $$PA^2=(x-a)^2+y^2$$

तथा $$PB^2=(x+a)^2+y^2$$

∴ अभीष्ट समीकरण है

$$(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2=2r^2$$

अथवा $2x^2+2y^2+2a^2=2r^2$

अर्थात् $x^2+y^2=r^2-a^2$

2·1. एक समीकरण का लेखाचित्र अथवा बिन्दुपथ (Graph or locus of an equation)

परिभाषा : किसी समीकरण का लेखाचित्र वह पथ या वक्र है जो एक ऐसे गतिमान बिन्दु से अंकित किया जाता है जिसके निर्देशांक (x, y) दिये हुये समीकरण को सर्वदा संतुष्ट करते हैं।

मान लो हम समीकरण $y^2-2y+3=x$ का लेखा चित्र ज्ञात करना चाहते हैं। इस समीकरण को संतुष्ट करने वाले किसी बिन्दु के निर्देशांकों को चुनते समय उसमें से हम केवल एक के ही मान को स्वेच्छा से ले सकते हैं। x अथवा y में से एक को अपनी इच्छानुसार कोई मान देने पर दूसरे का मान समीकरण की सहायता से निश्चित हो जाता है क्योंकि (x,y) के संगत मान ही समीकरण को सन्तुष्ट कर सकते हैं। यथा मान लो y को हम मान 3 देते हैं तो x को हमें केवल वही मान देना पड़ेगा जो इस समीकरण से प्राप्त होगा अर्थात् यहाँ x का मान 6 ही होगा। इस प्रकार y के मान 3 के लिए हमें एक बिन्दु (6,3) प्राप्त होता है। इसी प्रकार यदि हम y को अन्य ऐच्छिक व उचित मान देते जावें तो हमें x के संगत मान प्राप्त हो जावेंगे जो दिये हुये समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे। यदि हम इस प्रकार प्राप्त निर्देशांकों वाले बिन्दुओं को समतल पर अंकित करें तो ये बिन्दु साधारणतया किसी वक्र पर स्थित होंगे। यह वक्र ही समीकरण का लेखाचित्र होगा। इस वक्र पर स्थित सब बिन्दुओं के निर्देशांक इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

वक्र के समीकरण से हम सरलता से वक्र पर स्थित अनेक बिन्दुओं को ज्ञात कर सकते हैं। विलोमतः अनेक अंकित बिन्दुओं से वक्र को ठीक प्रकार से खींचना तथा फिर उसका समीकरण ज्ञात करना इतना सरल नहीं है।

चलना है तथा इसकी सहायता से प्रश्न में प्रयोग आने वाली राशियों का मान ज्ञात कर लें।

(*iii*) दिए हुए प्रतिवन्ध का प्रयोग करके (x, y) में उचित सम्बन्ध ज्ञात कर अभीष्ट समीकरण प्राप्त कर लें।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. यदि एक विन्दु निर्देश अक्षों के समतल में इस प्रकार चले कि इसका भुज इसकी कोटि के तिगुने से सर्वदा 2 कम हो तो इसके विन्दुपथ का समीकरण $x=3y-2$ होगा। यह आगे प्रदर्शित किया जायेगा कि इस प्रकार का एकघाती समीकरण सर्वदा एक सरल रेखा को निरूपित करता है। यहाँ विन्दु $(1,1)$, $(4, 2)$, $(-5,-1)$ इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। अतः ये सब इस विन्दुपथ पर स्थित हैं।

उदाहरण 2. यदि एक विन्दु इस प्रकार अपने पथ पर अग्रसर हो कि इसकी दूरी एक दिये हुए विन्दु $(2, 3)$ से सर्वदा 5 रहती हो तो इस विन्दु के विन्दुपथ का समीकरण होगा

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$$

उदाहरण 3. उस विन्दु के विन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करो जिसकी विन्दु $(a, 0)$ तथा $(-a, 0)$ से दूरियों के वर्गों का योग एक अचर राशि $2r^2$ के तुल्य हो जहाँ $r>a$।

क्रिया : मान लो गतिमान विन्दु P के चलित निर्देशांक (x, y) है तथा दिए हुए विन्दु क्रमशः A तथा B हैं।

प्रश्न में दिए हुए प्रतिवन्ध के अनुसार

$$PA^2+PB^2=2r^2$$

अब $$PA^2=(x-a)^2+y^2$$

तथा $$PB^2=(x+a)^2+y^2$$

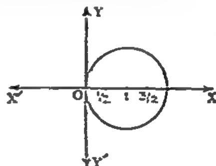
उदाहरण 2. समीकरण $x^2-2x+y^2=0$ द्वारा निरूपित वक्र खींचो।

क्रिया : x को इच्छानुसार मान 0, ½, 1, 1½, 2 देकर y के मान ज्ञात करने पर निम्न सारिणी प्राप्त होती है :—

$x=$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
$y=$	0	$\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$	0

x की परिसर (range) [0,2] के बाहर मान देने पर y के मान अधिकल्पित आते हैं अतः अभीष्ट वक्र [0,2] की सीमा के बाहर स्थित नहीं हो सकता। यदि $x=-1$, तब $y^2=-3$ इसलिए y अधिकल्पित होगा। फिर जब $x=2\frac{1}{2}$ तो $y^2=-\frac{5}{4}$ अतः x के इस मान के लिए भी y अधिकल्पित होगा।

उपरोक्त बिन्दुओं को अंकित करने पर हम देखते हैं कि ये सब एक वृत्त पर स्थित है जिसकी आकृति संलग्न चित्र में दी गई है।



चित्र 19

प्रश्नावली 2 (a)

निम्न नियमों के अनुसार किसी गतिमान बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करो जबकि (प्रश्न 1 से 7 तक)—

1. इसकी कोटि सर्वदा 3 है।
2. इसका भुज सर्वदा 4 है।
3. इसकी y-अक्ष से दूरी इसकी x-अक्ष से दूरी की तिगुनी है।
4. इसकी बिन्दु $(c,0)$ से दूरी इसकी x-अक्ष से दूरी की दुगुनी है।

दिये हुये समीकरण द्वारा निरुपित वक्र के अंकित करने का अर्थ उस वक्र की साधारण आकृति ज्ञात करना है। पर्याप्त संख्या में वक्र पर स्थित विन्दुओं को अंकित करके यदि हम मुक्त हस्त से उनमें से गुजरता हुआ एक वक्र खींचे तो अभीष्ट वक्र की आकृति ज्ञात हो जाती है।

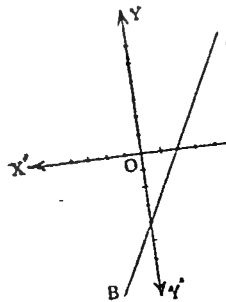
विद्यार्थियों ने (x,y) में एक घाती समीकरणों से निरुपित सरल रेखाओं के लेखाचित्र वीजगणित का अध्ययन करते समय खींचे होंगे। किसी दी हुई समीकरण का लेखाचित्र इसी प्रकार अंकित किया जा सकता है। इसके लिए केवल x तथा y के संगत मान-युग्मों की आवश्यकता है।

उदाहरण 1. समीकरण $2x-y=4$ द्वारा निरुपित विन्दुपथ को अनुरेखित करो।

क्रिया : x को $-2, -1, 0, 1, 2, 3$....मान देने पर y के मान $-8, -6, -4, -2, 0, 2$,....प्राप्त होते हैं। इस प्रकार x, y के मानों के लिए निम्न सारिणी प्राप्त होती है :—

$x=$	-2	-1	0	1	2	3
$y=$	-8	-6	-4	-2	0	2

इन विन्दुओं $(-2, -8)$, $(-1, -6)$, $(0, -4)$ $(1, -2)$, $(2, 0)$ $(3, 2)$ को अंकित करने पर हम देखते हैं कि ये सब एक सरल रेखा पर स्थित हैं। अतः दिया हुआ समीकरण एक सरल रेखा को निरुपित करता है।



चित्र 18

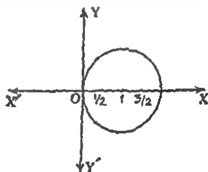
उदाहरण 2. समीकरण $x^2-2x+y^2=0$ द्वारा निरूपित वक्र खींचो।

क्रिया : x को इच्छानुसार मान 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2 देकर y के मान ज्ञात करने पर निम्न सारिणी प्राप्त होती है :—

$x=$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
$y=$	0	$\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$	0

x को परिसर (range) [0,2] के बाहर मान देने पर y के मान अधिकल्पित आते हैं अतः अभीष्ट वक्र [0,2] की सीमा के बाहर स्थित नहीं हो सकता। यदि $x=-1$, तब $y^2=-3$ इसलिए y अधिकल्पित होगा। फिर जब $x=2\frac{1}{2}$ तो $y^2=-\frac{5}{4}$ अतः x के इस मान के लिए भी y अधिकल्पित होगा।

उपरोक्त बिन्दुओं को अंकित करने पर हम देखते हैं कि ये सब एक वृत्त पर स्थित है जिसकी आकृति संलग्न चित्र में दी गई है।



चित्र 19

प्रश्नावली 2 (a)

निम्न नियमों के अनुसार किसी गतिमान बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करो जबकि (प्रश्न 1 से 7 तक)—

1. इसकी कोटि सर्वदा 3 है।
2. इसका भुज सर्वदा 4 है।
3. इसकी y-अक्ष से दूरी इसकी x-अक्ष से दूरी की तिगुनी है।
4. इसकी बिन्दु $(a,0)$ से दूरी इसकी x-अक्ष से दूरी की दुगुनी है।

इसकी बिन्दु $(0,b)$ से दूरी इसकी y-अक्ष की दूरी से b अधिक है।

इसकी y-अक्ष से दूरी इसकी मूल बिन्दु से दूरी की सर्वदा आधी है।

इसकी बिन्दु $(1, 2)$ से दूरी इसकी बिन्दु $(4, 0)$ से दूरी के बराबर है।

8. दो स्थिर बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ तथा $(-a,0)$ हैं। एक गतिमान बिन्दु P के बिन्दुपथ का समीकरण निम्न स्थितियों में ज्ञात करो जबकि—

   (i) $PA^2+PB^2=AB^2$
   (ii) $PA+PB=2k$ जहाँ k एक अचर राशि है।
   (iii) $PA^2-PB^2=c^2$

9. एक बिन्दु इस प्रकार चलता है कि दो स्थिर बिन्दुओं A तथा B से उसकी दूरियों के वर्गों का योग अचर रहता है। इस बिन्दु के पथ का समीकरण सरलतम रूप में ज्ञात करो।

10. एक स्थिर बिन्दु किसी नियत सरल रेखा से a दूरी पर है और एक गतिमान बिन्दु इस प्रकार चलता है कि इसकी स्थिर बिन्दु से तथा नियत रेखा से दूरियाँ सर्वदा बराबर रहती हैं। स्थिर बिन्दु को मूल बिन्दु तथा निर्देश अक्षों को नियत रेखा के समान्तर व लम्ब मानकर गतिमान बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करो।

11. निर्देश अक्षों के बीच के कोण XOY को दो समान भागों में विभक्त करने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

12. A और B दो बिन्दु क्रमशः x और y अक्षों पर इस प्रकार स्थित है कि $2 \times OA+3 \times OB=10$ तो रेखा AB के मध्य बिन्दु का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

13. एक बिन्दु इस प्रकार गमन करता है कि उसकी बिन्दु $(ae,0)$ और $(-ae,0)$ से दूरियों का योग $2a$ के बराबर है सिद्ध करो कि उसका बिन्दुपथ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$ होगा [राज. प्रि. यू., 72]

14. उस बिन्दु का बिंदुपथ ज्ञात करो जो (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बिंदुओं के साथ समरेख है।

x और y के कई मान-युग्म लेकर निम्न समीकरणों द्वारा निरूपित वक्रों को खींचो—

15. (*i*) $x+2y=5$; (*ii*) $3x-y=2$.
16. (*i*) $x^2+y^2=25$; (*ii*) $x^2+y^2-6y=0$.
17. (*i*) $x^2=2y$; (*ii*) $y^2=6x$.
18. उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करो जहाँ समीकरण $x^2+y^2+6x-6y+9=0$ द्वारा निरूपित वक्र निर्देश अक्षों को काटता है।

प्रश्नावली 2 (b)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

निम्न प्रश्नों में प्रत्येक के चार उत्तर (A), (B), (C) एवं (D) दिए गए हैं। इनमें केवल *एक सही है।* उसके *संकेतात्मक उत्तर का संगत अक्षर कोष्ठक में लिखिए :—*

1. उस बिन्दु का बिन्दुपथ जिसकी y-अक्ष से दूरी उसकी x-अक्ष से दूरी की सर्वदा दो गुनी रहती है निम्न है—

(A) $y=2x$ (B) $x=2y$

(C) $x^2=2y^2$ (D) $y^2=4x^2$

]

यदि किसी गतिमान विन्दु की मूल विन्दु से दूरी का वर्ग उसकी y-अक्ष से दूरी से सदा 3 अधिक हो तो उसका विन्दुपथ होगा— ( )

(A) $x^2=3$ (B) $x^2+y^2-3=x$

(C) $x^2+y^2=y+3$ (D) $x^2+y^2=x-3$

3. उस विंदु का विंदुपथ जो विंदु (4,3) और (3, 4) से सर्वदा समान दूरी पर रहता है निम्न है— ( )

(A) $x+y=0$ (B) $2x-y=0$

(C) $x-y=0$ (D) $2x+y=0$

4. उस विन्दु का विन्दुपथ जिस विन्दु पर (2, 0) तथा (−2, 0) को मिलाने वाली रेखा एक समकोण अन्तरित करे निम्न होगा— ( )

(A) $y^2-x^2=4$ (B) $x^2-y^2=4$

(C) $x^2+y^2+4=0$ (D) $y^2+x^2=4$

5. कोण XOY को समद्विभाजित करने वाली रेखा का समीकरण होगा— (

(A) $x+y=0$ (B) $x-y=0$

(C) $x+y=1$ (D) $x-y=1$

6. एक चर विंदु P मूल विंदु तथा विंदु (4, 3) से समान दूरी पर है P का विन्दुपथ ज्ञात कीजिए। [राज. बोर्ड; 72

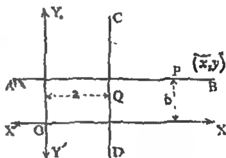
(..

3

सरल रेखा
(Straight line)

3·0. निर्देशाक्षों में से एक के समान्तर किसी सरल* रेखा का समीकरण ज्ञात करना।

मान लो AB एक सरल रेखा है जो x-अक्ष के समान्तर है तथा उससे b दूरी पर है। इस रेखा पर कोई बिन्दु P (x,y) लो। जैसा चित्र से स्पष्ट है बिन्दु P रेखा AB पर चाहे कहीं भी स्थित हो इसकी कोटि सर्वदा b ही रहती है। अर्थात् AB पर स्थित सब बिन्दुओं के लिए $y=b$ अतएव x-अक्ष के समान्तर तथा उससे b दूरी पर स्थित एक सरल रेखा AB का समीकरण है :



चित्र 20

$$y=b \qquad ....(1)$$

इसी प्रकार y-अक्ष के समान्तर तथा उससे a दूरी पर स्थित एक सरल रेखा CD का समीकरण है :

$$x=a \qquad ....(2)$$

उपसाध्य– समीकरण $ax+b=0$ को $x=a$ रूप में रखने पर $x=-\dfrac{b}{a}$, y-अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा को निरूपित करता

*केवल 'रेखा' भी 'सरल रेखा' के लिए ही प्रयुक्त किया जाता है।

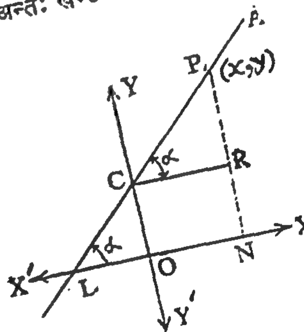
इसी प्रकार $cy+d=0$, अथवा $y=-\frac{d}{c}$, x-अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा को निरूपित करता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि कोई भी एक घाती समीकरण जिसमें x तथा y में से एक राशि ही प्रकट होती है, अक्षों में से एक के समान्तर सरल रेखा को निरूपित करता है।

3·1. झुकाव या स्पर्शज्या रूप (Slope or tangent form)

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो y-अक्ष में से एक दिया हुआ अन्तःखण्ड (Intercept) काटती है और x-अक्ष से दिया हुआ कोण बनाती है। [राज. बोर्ड; 68, 70]

मान लो AB वह सरल रेखा है जो y-अक्ष से अन्तः खण्ड $OC=c$ काटती है और x-अक्ष से दिया हुआ कोण $CLX=\alpha$ बनाती है।



चित्र 21

मान लो $\tan\alpha=m$

AB पर कोई विन्दु P लो जिसके निर्देशांक (x,y) हैं। अब रेखा AB का समीकरण ज्ञात करने के लिए हमको दी हुई राशियों c और α अथवा m की सहायता से x तथा y में एक सम्बन्ध ज्ञात करना है।

P से x-अक्ष पर PN लम्ब डालो तथा विन्दु C से PN पर CR डालो।

तब $\angle PCR=\angle CLN=\alpha$ तथा $RN=CO=c$

अब चित्र द्वारा हम देखते हैं कि

$PN=PR+RN=CR\tan\alpha+RN=ON\tan\alpha+C$

अर्थात् $y = x \tan \alpha + c$

या $y = xm + c$

क्योंकि यह सम्बन्ध रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए सत्य है अतः सरल रेखा AB का अभीष्ट समीकरण है—

$$\boxed{y = mx + c}$$

इस समीकरण मे x का गुणांक m उस कोण का tangent (स्पर्ज्या) है जिसे वह रेखा x-अक्ष की धन दिशा से बनाती है तथा राशि c इस रेखा द्वारा y-अक्ष से काटा हुआ अन्तः खण्ड है।

m तथा c राशियों को उचित मान देकर हम किसी भी रेखा को इस समीकरण द्वारा निरुपित करा सकते है। किन्तु इससे वे रेखाएँ निरुपित नही होती जिनके समीकरण $x = a$ रूप के हैं। कोण α $(=\tan^{-1}m)$ को रेखा $y = mx + c$ का झुकाव (Inclination) कहते हैं। इस रूप में सरल रेखा का समीकरण झुकाव अथवा स्पर्शज्या रूप में कहा जाता है, यह रूप बहुत महत्वपूर्ण है। अतः इसे भली-भाँति समझकर स्मरण रखना चाहिए।

उपसाध्य 1. यदि रेखा मूल बिन्दु में होकर जाती है तो इसके द्वारा काटा हुआ अन्तः खण्ड शून्य होगा। अतः मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण $y = mx$ होगा अर्थात् इसमें अचर राशि c नहीं होगी।

2. यदि रेखा x-अक्ष के समान्तर हो तो $m = \tan 0° = 0$ और समीकरण $y = c$ का रूप धारण कर लेता है।

टिप्पणी : समीकरण $y = mx + c$ में अन्तः खण्ड के लिए प्रयुक्त राशि c धन होगी जब रेखा y-अक्ष को मूल बिन्दु से ऊपर काटे और ऋण तब होगी जब रेखा y-अक्ष को O से नीचे की ओर काटे। पुनः झुकाव के लिए प्रयुक्त राशि m उस कोण का tangent होगी जो दी हुई रेखा द्वारा x-अक्ष की धन दिशा (positive direction) अर्थात् OX (न कि OX′) से बनाया जाता है। इस प्रकार α के न्यून व अधिक कोण होने के अनुसार m धनात्मक या ऋणात्मक होगा।

]

उदाहरण 1. एक सरल रेखा y-अक्ष से मूल बिन्दु के नीचे से 4 इकाई बराबर अन्तः खण्ड काटती है तथा x-अक्ष से 150° का कोण बनाती है उसका समीकरण ज्ञात करो।

क्रिया : मान लो अभीष्ट समीकरण

$$y=mx+c \quad \text{है।}$$

यहाँ $\quad m=\tan\ 150^\circ=-\tan\ 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

तथा $c=-4$

$\therefore$ रेखा का समीकरण है $\quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-4$ उत्तर

अथवा $\quad \sqrt{3}y+x+4\sqrt{3}=0.$

उदाहरण 2. समीकरण $3x-4y=20$ को $y=mx+c$ के रूप में परिणित करके इससे निरूपित रेखा की प्रवणता तथा y-अक्ष पर अन्तः खण्ड ज्ञात करो।

क्रिया : यहाँ दिये हुये समीकरण को लिखा जा सकता है—

$$4y=3x-20$$

अथवा $\quad y=\frac{3}{4}x-5$

इसकी समीकरण $y=mx+c$ से तुलना करने पर

$m=\frac{3}{4}$ जिससे प्रवणता $\alpha=\tan^{-1}(\frac{3}{4})$

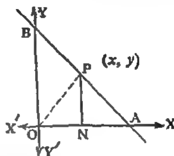
तथा अन्तःखण्ड $c=-5$ (मूल बिन्दु से नीचे की ओर) प्राप्त

3 2. अन्तःखण्ड रूप (Intercept form)

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो निर्देशांक अक्षों से दिये गये अन्तः खण्ड काटे ।

मान लो सरल रेखा AB, x-अक्ष तथा y-अक्ष से क्रमशः a तथा b इकाई के बराबर अन्तः खण्ड काटती है ।

मान लो ये अन्तः खण्ड OA तथा OB हैं । A B पर कोई बिन्दु P लो जिसके निर्देशांक (x, y) हैं । P से x-अक्ष पर PN लम्ब खीचो तथा बिन्दु O को P से मिला दो ।



अब चित्र मे $OA = a$, $OB = b$, $ON = x$, $PN = y$

समरूप त्रिभुज ANP तथा AOB से हम देखते हैं कि—

चित्र 22

$$\frac{PN}{BO} = \frac{NA}{OA} = \frac{OA - ON}{OA}$$

अर्थात् $\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a} = 1 - \frac{x}{a}$ $\quad \therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

क्योंकि यह सम्बन्ध रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांको के लिए सत्य है अतः उस सरल रेखा का समीकरण जो अक्षों से अन्तः खण्ड a और b काटती है,

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

विकल्प विधि—चित्र द्वारा हम देखते हैं कि

$$\triangle OBP + \triangle OAP = \triangle AOB$$

अर्थात् $\quad \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}ab$

या $\quad bx + ay = ab$

दोनों पक्षों को ab से विभाजित करने पर

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, जो रेखा का अभीष्ट समीकरण है ।

(टि)प्पणी: अन्तः खण्ड a, विन्दु A के मूल बिन्दु O से दांई अथवा बांई (हो)ने के अनुसार धन या ऋण होगा तथा b, विन्दु B के O से ऊपर व (नीचे) होने के अनुसार धन या ऋण होगा।

उपसाध्य—जब $a \to \infty$ तो रेखा x—axis के समान्तर होगी।

और जब $b \to \infty$ तो रेखा y—axis के समान्तर होगी।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो x तथा y-अक्षों (प)र अन्तः खण्ड क्रमशः 3 तथा —4 काटती है।

क्रिया: यहाँ पर $a=3$, तथा $b=-4$

अतः रेखा का समीकरण होगा—

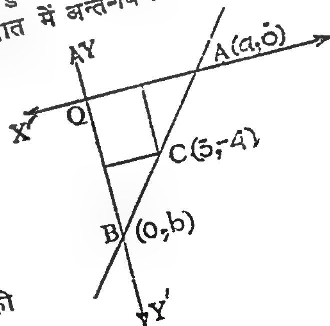
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$$

अर्थात

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$$

अतः अभीष्ट समीकरण $4x-3y=12$ है।

उदाहरण 2. यदि अक्षों के बीच कटा हुआ किसी रेखा का अन्तः खण्ड विन्दु $(3, -4)$ द्वारा $(2:3)$ के अनुपात में अन्त-विभाजित होता है तो रेखा का समीकरण ज्ञात करो।



चित्र 23

क्रिया : यहाँ $OA=a$ तथा $OB=b$ है जिससे A के तथा B के निर्देशांक क्रमानुसार $(a, 0)$ और $(0, b)$ हैं।

$\therefore$ विन्दु $(3, -4)$ AB को $2:3$ की निष्पत्ति में विभक्त करता है।

अतः　$3=\frac{2\times 0+3\times a}{5}=\frac{3a}{5}$

और　$-4=\frac{2\times b+3\times 0}{5}=\frac{2b}{5}$

$\therefore$　$a=5$ तथा $b=-10$

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण है

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-10}=1$$

अर्थात्　$2x-y=10.$　　उत्तर

उदाहरण 3. एक सरल रेखा ऐसी है कि इसका निर्देश-अक्षों के बीच का भाग बिन्दु (a, b) पर समद्विभाजित होता है; सिद्ध करो कि इसका समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ है।

क्रिया : मान लो रेखा CD का अक्षों के बीच वाला भाग AB बिंदु M पर समद्विभाजित होता है। OX तथा OY पर क्रमशः MN तथा MR लम्ब डालिए। तब $ON=a$ तथा $OR=b$

अब क्योंकि N तथा R क्रमशः OA तथा OB के मध्य बिन्दु हैं,

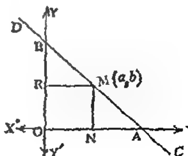
$$OA=2ON=2a$$

तथा　$OB=2OR=2b$

$\therefore$ रेखा AB का समीकरण है

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$$

अथवा　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$



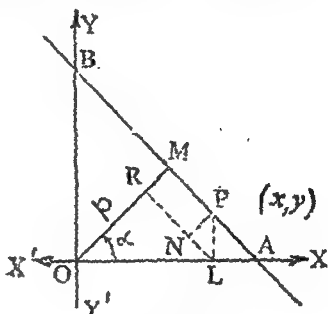
चित्र 24

3·3. लम्ब रूप (Perpendicular form)

किसी सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जब मूल विन्दु से उस पर डाले हुए लम्ब की लम्बाई तथा इस लम्ब का x-अक्ष पर झुकाव दिए हुए हैं। [राज. बोर्ड; 71]

मान लो सरल रेखा AB है, उस पर मूल विन्दु से डाला हुवा लम्ब OM $=p$ है तथा इस लम्ब का x-अक्ष से झुकाव अर्थात् कोण MOX $=\alpha$ है।

इस रेखा पर कोई विन्दु P लो जिसके निर्देशांक (x, y) हैं। P से OX पर लम्ब PL खींचो, फिर इसके पाद L से OM पर एक लम्ब LR खींचो और P से LR पर भी एक लम्ब PN खींचो।



चित्र 25

जैसा चित्र से स्पष्ट होता है

$$\angle PLN = 90° - \angle RLO = \angle ROL = \alpha.$$

अब $p = OM = OR + RM = OR + PN$

$\therefore$ त्रिभुज ORL से $OR = OL \cos\alpha = x \cos\alpha$

तथा त्रिभुज PLN से $PN = PL \sin\alpha = y \sin\alpha$

$$\therefore p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

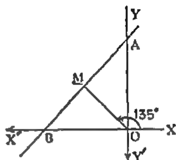
अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण है

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$$

टिप्पणी : क्योंकि p एक लम्बाई को व्यक्त करता है अतः इसे एक धन (positive) संख्या माना जाता है तथा α वह कोण है जो यह लम्ब OM $=p$, x-अक्ष की धन दिशा से वामावर्त्त दिशा में बनाता है अर्थात् $\alpha = \angle MOX$ और α का हम सर्वदा $-\pi$ तथा π के बीच वाला मान ही लेंगे क्योंकि यही इस कोण का मुख्य मान (Principal value) होता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जिस पर मूल विन्दु से डाला हुआ लम्ब 6 इकाई के बराबर है तथा यह लम्ब x-अक्ष की धन दिशा से $135°$ का कोण बनाता है।



चित्र 26

क्रिया : यहाँ $p=6$ तथा $\alpha=135°$

जिससे $\cos\alpha=\cos 135°=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

और $\sin\alpha=\sin 135°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ अभीष्ट समीकरण है :

$$\frac{-x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=6$$

अर्थात् $x-y+6\sqrt{2}=0$

उदाहरण 2. एक सरल रेखा पर मूल विन्दु से डाला गया लम्ब y-अक्ष से $30°$ का कोण बनाता है और इसकी लम्बाई 2 इकाई है। इस रेखा का समीकरण तथा इसके द्वारा अक्षो से काटे गए अन्तःखण्डो की लम्बाई ज्ञात करो।

क्रिया : यहाँ दी हुई रेखा पर डाला गया लम्ब x-अक्ष से $90°+30°=120°$ का कोण बनाता है तथा इसकी लम्बाई 2 है।

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण है :

$$x\cos 120°+y\sin 120°=2$$

अर्थात् $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=2$ अथवा $y\sqrt{3}-x=4$

अथवा $$\frac{x}{-4}+\frac{y}{\frac{4}{\sqrt{3}}}=1$$

अतः इसके द्वारा अक्ष से काटे गए अन्तःखण्डों की लम्बाई क्रमशः 4 तथा $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ है।

यहाँ रेखा x-अक्ष को मूल विन्दु के बाँई ओर और y-अक्ष को मूल बिन्दु के ऊपर की ओर काटती है।

टिप्पणी : अनुच्छेद 3·1, 3·2 तथा 3·3 में प्रतिपादित एक सरल रेखा के प्रामाणिक रूप (Standard form) वाली समीकरण को ध्यानपूर्वक अध्ययन करने पर हमें निम्नलिखित बातें स्पष्ट हो जाती है :—

(*i*) इन तीनों रूपों की समीकरण में से प्रत्येक में दो अचर राशियों का प्रयोग हुआ है। इन अनुच्छेदों में प्रयुक्त ये राशियाँ क्रमशः (m, c), (a, b) तथा (p, a) हैं। इससे प्रतीत होता है कि एक सरल रेखा की स्थिति को नियत करने के हेतु दो नियन्त्रणों अथवा प्रतिवन्धों की आवश्यकता है। इन तीनों अवस्थाओं में से प्रत्येक में ये दो प्रतिवन्ध दिये हुये हैं। हमें समतल ज्यामिति से भी ज्ञात है कि एक सरल रेखा को निर्धारित करने के लिए दो प्रतिवन्धों की आवश्यकता होती है यथा एक रेखा दो बिन्दुओं में से होकर जाती हो अथवा एक विन्दु में से होकर जाती हो तथा किसी अन्य रेखा के लम्ब हो।

(*ii*) ये सब समीकरण x तथा y में एकघाती हैं। हम अनुच्छेद 3·4 में व्यापक रूप से सिद्ध करेंगे कि प्रत्येक रेखा का समीकरण एकघाती (Linear) होता है।

प्रश्नावली 3 (a)

1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो x-अक्ष के समान्तर है तथा
   (*i*) मूल विन्दु से ऊपर की ओर 4 इकाई की दूरी पर है।
   (*ii*) मूल विन्दु से नीचे की ओर 7 इकाई की दूरी पर है।
2. y-अक्ष के समान्तर उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो जो मूल विन्दु से क्रमशः 3, −4 और $\frac{2}{5}$ इकाई की दूरी पर हैं।
3. विन्दु (−3,2) में होकर y-अक्ष के क्रमानुसार समान्तर व लम्ब सरल रेखायें खींची जाती हैं। उनके समीकरण ज्ञात करो।

4. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो
   (i) x-अक्ष से 45° का कोण बनाती है तथा y-अक्ष से 2 इकाई के बराबर अन्तः खण्ड काटती है।
   (ii) y-अक्ष को मूल बिन्दु के नीचे की ओर, 5 इकाई की दूरी पर काटती है और x-अक्ष की धन दिशा से 120° का कोण बनाती है।
   (iii) y-अक्ष से -6 का अन्तःखण्ड काटती है और x-अक्ष से $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ का कोण बनाती है।
5. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो मूल बिन्दु से गुजरती है तथा
   (i) OX' से द्वितीय चरण मे 30° का कोण बनाती है।
   (ii) OY से प्रथम चरण मे 60° का कोण बनाती है।
6. निम्न रेखाओं द्वारा y-अक्ष से काटे गए अन्त.खण्डो की लम्बाई तथा x-अक्ष से बनाये गए कोणों की माप ज्ञात करो—
   (i) $x+\sqrt{3}y=6$; (ii) $3x-2y=5$
7. (i) उन सरल रेखाओ के समीकरण ज्ञात करो जो दोनो अक्षो के बीच के कोणों को समद्विभाजित करती हैं।
   (ii) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो y-अक्ष की ऋण दिशा से 4 इकाई के बराबर अन्तःखण्ड काटे और कोण XOY के समद्विभाजक के समान्तर हो।
8. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो x तथा y-अक्ष से क्रमशः निम्नलिखित अन्तः खण्ड काटती है—
   (i) $(5, 3)$; (ii) $(-2, 3)$; (iii) $(4, 5)$; (iv) $(-1, -4)$;

उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो (प्रश्न 9 से 13)—

9. बिन्दु $(2, 3)$ से गुजरती है तथा अक्षों से बराबर के अन्त खण्ड काटती है।

]

. विन्दु (1, 2) से होकर जाती है तथा उसके द्वारा x-अक्ष से काटा हुआ अन्तःखण्ड y-अक्ष से काटे हुए अन्तःखण्ड का दो गुना है।

11. विन्दु (4, −3) में होकर जाती है तथा अक्षों से काटे हुए अन्तःखण्डों का योग 5 है। सिद्ध करो कि ऐसी दो रेखायें खींची जा सकती हैं।

12. विन्दु (3, −2) से होकर गुजरती है तथा अक्षों के बीच का इसका अन्तः खण्ड इस विन्दु पर 3 : 4 की निष्पत्ति में विभाजित होता है।

13. विन्दु (−3, −5) से होकर जाती है तथा इसके दोनों अक्षों के बीच वाला अन्तः खण्ड इस विन्दु पर समद्विभाजित होता है।

14. रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 3$ (जहाँ α एक चर राशि है) से अक्षों द्वारा काटे गये अन्तः खण्ड के मध्य विन्दु का विन्दुपथ ज्ञात करो।

15. एक ऐसी रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो मूल विन्दु में से होकर जाती है और $3x + y + 12 = 0$ रेखा के द्वारा निर्देशांकों के बीच में काटे हुए अन्तः खण्ड को 1 : 2 की निष्पत्ति में विभक्त करती है।

16. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जिस पर मूल विन्दु से डाला हुआ लम्ब, 4 इकाई के बराबर है तथा यह लम्ब x-अक्ष से 150° का कोण बनाता है।

17. एक सरल रेखा पर मूल विन्दु से खींचा हुआ लम्ब x-अक्ष की धन दिशा से 45° का कोण बनाता है और 3 इकाई के बराबर है। इस रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

18. सरल रेखा $3x - 4y = 5$ के दोनों अक्षों के बीच में आये हुए अन्तः खण्ड की लम्बाई ज्ञात करो।

3·4 x और y में एकघाती समीकरण सर्वदा एक सरल रेखा को निरूपित करता है।

x तथा y में एकघाती समीकरण का सबसे व्यापक रूप है :

$$Ax + By + C = 0$$

जहाँ राशियां A, B तथा C अचर पद हैं अर्थात् इनमें x और y विद्यमान नहीं और ये इस समीकरण से निरूपित विन्दुपथ के प्रत्येक विन्दु के लिये समान

हैं। इस रूप में प्रथम घात के x और y वाले दोनों पद तथा उससे कम अर्थात् शून्य घात का भी पद (C) विद्यमान है। अतः यह प्रथम घात का व्यापक समीकरण (General equation of first degree) है।

मान लो (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) इस समीकरण द्वारा निरूपित बिन्दुपथ पर तीन बिन्दु हैं।

क्योंकि ये बिन्दु इस बिन्दुपथ पर स्थित हैं अतः इनके निर्देशांक समीकरण (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

$$\therefore \quad Ax_1 + By_1 + C = 0 \qquad ....(2)$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \qquad ....(3)$$
$$Ax_3 + By_3 + C = 0 \qquad ....(4)$$

इन तीन समीकरणों में से तीन राशियों A, B तथा C को लुप्त करने पर सारणिक रूप में प्राप्त होता है

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad ....(5)$$

किन्तु जैसा अनुच्छेद 1·6 में प्रदर्शित किया गया है, (5) से सिद्ध होता है कि एक त्रिभुज का, जिसके शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2), तथा (x_3, y_3) हैं, क्षेत्रफल शून्य है। इस प्रकार बिन्दुपथ पर स्थित किन्हीं तीन बिन्दुओं द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य के बराबर प्राप्त होता है अर्थात् ये बिन्दु एक सरल रेखा पर हैं। अतः समीकरण $Ax + By + C = 0$ एक सरल रेखा को निरूपित करता है।

टिप्पणी 1. यद्यपि सरल रेखा के व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ में देखने मात्र से तीन अचर पद प्रतीत होते हैं किन्तु वास्तव में इसमें दो ही स्वतन्त्र अचर पद है क्योंकि इसको हम $\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$ के रूप में भी रख सकते हैं जिनमें $\frac{A}{C}$ को A' तथा $\frac{B}{C}$ को B' रखने पर समीकरण का रूप $A'x + B'y + 1 = 0$ होता है और इस प्रकार समीकरण में केवल दो ही अचर पद शेष रहते हैं।

टिप्पणी 2. यदि दो समीकरण $ax+by+c=0$ तथा $a'x+b'y+c'=0$ एक ही रेखा को निरूपित करें तो $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

अर्थात् समान पदों के गुणक समानुपाती होंगे अथवा एक समीरकण दूसरी समीकरण को किसी अचर संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होती हैं। यथा $3x+2y-7=0$ तथा $6x+8y-14=0$ एक ही रेखा को निरूपित करते हैं।

3·5. सरल रेखा के व्यापक रूप वाले समीकरण को प्रामाणिक रूप में रखना।

प्रथम रूप : $y=mx+c$ (...च्छेद 3·2)

व्यापक रूप $Ax+By+C=0$ को इस रूप में निर... रख सकते हैं।

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

अथवा $$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

यह $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ के रूप की है। अतः उस सरल रेखा को निरूपित करती है जो अक्षों से $-\frac{C}{A}$ तथा $-\frac{C}{B}$ के बराबर अन्तःखंड काटती है।

तृतीय रूप : $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ (अनुच्छेद 3·4)

$Ax+By+C=0$ को इस रूप में रखने के लिये मानलो ये दोनों समीकरण उस एक ही रेखा को निरूपित करते हैं। तब समान पदों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\sin\alpha}{B}=\frac{-p}{C}$$

अर्थात् $$\frac{p}{C}=\frac{\cos\alpha}{-A}=\frac{\sin\alpha}{-B}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

जिससे $$\cos\alpha=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\alpha=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

तथा $$p=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

इस प्रकार व्यापक रूप वाली समीकरण को निम्न प्रकार से रख सकते हैं :

$$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

इस प्रकार $Ax+By+C=0$ को $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ रूप में रखने के लिए हम पहले अचर पद को ऋण बनाते हैं क्योंकि यह दक्षिण पक्ष मे आने वाली एक धन राशि (लम्ब की लम्बाई) को व्यक्त करता है। फिर सब पक्षों को $\sqrt{A^2+B^2}$ अर्थात् x तथा y के गुणांकों के वर्गों के योग के वर्गमूल से भाग देने पर अभीष्ट रूप प्राप्त होता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

दाहरण—समीकरण $3x-5y+6=0$ को स्पर्शज्या, अंतःखंड और रूपों में रखो तथा इनमें प्रयुक्त अचर पदों के मान ज्ञात करो।

क्रिया : (i) समीकरण $3x-5y+6=0$ को हम रख सकते हैं

$$5y=3x+6$$

अथवा $$y=\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}$$

यह $y=mx+c$ के रूप का है जहाँ $m=\frac{3}{5}$ तथा $c=\frac{6}{5}$

(ii) समीकरण $3x-5y+6=0$ को रख सकते हैं

$$3x-5y=-6$$

अथवा $$\frac{x}{-\frac{6}{3}}+\frac{y}{\frac{6}{5}}=1$$

इस प्रकार दी हुई रेखा पर मूल बिन्दु से डाले हुए लम्ब की लम्बाई $\frac{8}{\sqrt{34}}$ है तथा x-अक्ष पर इस लम्ब का झुकाव $\tan^{-1}\left(\frac{-5}{3}\right)$ है।

3·6. जैसा कि हम पहिले ही देख चुके हैं कि किसी सरल रेखा की स्थिति नियत करने के लिए दो प्रतिबन्धों की आवश्यकता होती है। अब हम निम्न दो प्रतिबन्धों पर विचार करेंगे—

(*i*) रेखा एक बिन्दु में से होकर तथा एक दी हुई दिशा में खींची जाती है।

(*ii*) रेखा दो दिए हुए बिन्दुओं से गुजरती है।

रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए पहिले हम इसका समीकरण प्रामाणिक रूप $y=mx+c$ में मानेंगे, फिर दिये हुए प्रतिबन्धों की सहायता से इसमें प्रयुक्त अचर राशियों m तथा c के मान ज्ञात करेंगे। अन्त में इनके मानों को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर अभीष्ट समीकरण प्राप्त होगा।

3·7. एक दिये हुए बिन्दु से गुजरती हुई तथा एक दी हुई दिशा में खींची हुई रेखा का समीकरण ज्ञात करना (बिन्दु-झुकाव रूप)

मान लो दिया हुआ बिन्दु (x_1, y_1) है तथा रेखा x-अक्ष से कोण $\alpha(=\tan^{-1}m)$ बनाती है।

हम जानते हैं कि x-अक्ष से $\alpha=\tan^{-1}m$ कोण बनाने वाली किसी रेखा का समीकरण है : $y=mx+c$ ....(1)

अब क्योंकि यह रेखा बिन्दु (x_1, y_1) में होकर जाती है अतः इस बिन्दु के निर्देशांक समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे।

$$\therefore \quad y_1=mx_1+c$$

$$\text{अतः} \quad c=y_1-mx_1 \quad ....(2)$$

c के इस मान को (1) में प्रतिस्थापित करने पर सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण प्राप्त होता है : $y=mx+y_1-mx_1$

अर्थात् $\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$

उदाहरण—उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बि
से होकर गुजरे और x-अक्ष से 45° का कोण बनाये।

यह समीकरण होगा $y-2=\frac{5-2}{7-4}(x-4)$

$$=(x-4)$$

अर्थात् $y-x+2=0$

अब हम सरलता से देखते हैं कि तीसरे विन्दु (9, 7) के निर्देशांक इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। अतः तीसरा विन्दु इस रेखा पर स्थित है अर्थात् तीनों विन्दु समरेख हैं और इनको मिलाने वाली रेखा का समीकरण $y-x+2=0$ है।

उदाहरण 3. एक आयत की भुजाओं के समीकरण

$$x=2;\ x=-4;\ y=3,\ \text{तथा}\ y=-5\ \text{हैं}$$

इसके कर्णों के समीकरण ज्ञात करो।

क्रिया : दिए हुए आयत की भुजाओं के समीकरणों से उसके शीर्षों के निर्देशांक प्राप्त होते हैं :

(2, 3), (−4, 3), (−4, −5) तथा (2, −5)

मान लो ये क्रमशः A, B, C तथा D हैं तब कर्ण AC का समीकरण होगा

$$y-3=\frac{-5-3}{-4-2}(x-2)=\frac{4}{3}(x-2)$$

अर्थात् $3y-4x=1$

और कर्ण BD का समीकरण है

$$y-3=\frac{-5-3}{2+4}(x+4)=\frac{-4}{3}(x+4)$$

अतः $3y+4x+7=0$

उदाहरण 4. विन्दु (1, 2) तथा (4, 3) को मिलाने वाली रेखा (2, 3) तथा (4, 1) को मिलाने वाली रेखा द्वारा किस अनुपात में वि[भाजित] होती है ?

क्रिया : विन्दु (2, 3) तथा (4, 1) को मिलाने वाली रेखा है

$$y-3=\frac{1-3}{4-2}(x-2)$$

$$x+y-5=0$$

मान लो रेखा (1) बिन्दु (1, 2) तथा (4, 3) को मिलाने वाली रेखा को अनुपात $\lambda : 1$ में विभाजित करती है। तब विभाजन बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{4\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{3\lambda+2}{\lambda+1}\right)$$

क्योंकि यह बिन्दु रेखा (1) पर स्थित है अतः

$$\frac{4\lambda+1}{\lambda+1} + \frac{3\lambda+2}{\lambda+1} = 5$$

अथवा $7\lambda+3=5\lambda+5$

अर्थात् $\lambda=1$

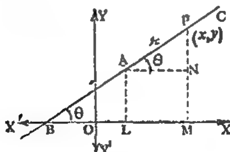
∴ अभीष्ट अनुपात 1 : 1 है।

3·8. एक दिए हुये बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा x-अक्ष से θ कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण निम्न रूप में ज्ञात करना

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$$

जहाँ r रेखा पर स्थित किसी बिन्दु की दिये हुए बिन्दु से दूरी है।

[राज०, 66]



चित्र 27

मान लो रेखा CAB पर दिये हुए निर्देशांकों वाला बिन्दु A तथा इसी रेखा पर स्थित किसी अन्य बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं और दूरी $AP=r$.

A तथा P से x-अक्ष पर लम्ब AL तथा PM खींचो। फिर A से PM पर लम्ब AN डालो।

अब हम चित्र से देखते हैं कि

$$AN = x - x_1 = r \cos\theta$$

और $$PN = y - y_1 = r \sin\theta$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r}$$

क्योंकि वह सम्बन्ध रेखा पर स्थित किसी भी विन्दु के निर्देशांक के लिये सत्य है अतः यही सरल रेखा CAB का अभीष्ट समीकरण है।

टिप्पणी : A के विपरीत ओर स्थित विन्दुओं के लिये दूरियां विपरीत चिन्हों की होती हैं।

उपसाध्य—ऊपर निर्धारित समीकरण से रेखा पर और स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक होंगे $x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta$

इस प्रकार रेखा पर स्थित किसी विन्दु P के निर्देशांक (x, y) विन्दु A के निर्देशांकों (x_1, y_1), कोण θ तथा इस विन्दु की A से दूरी r के पदों में रखे जा सकते हैं। ये प्राचलिक (parametric) निर्देशांक कहलाते हैं।

उदाहरण—एक सरल रेखा विन्दु A $(1, \sqrt{3})$ में होकर खींची जाती है तथा x-अक्ष से $60°$ का कोण बनाती है। इस रेखा का समीकरण ज्ञात करो और विन्दु A की उस विन्दु से दूरी ज्ञात करो जहाँ यह रेखा एक अन्य रेखा $x + y\sqrt{3} = 8$ से मिलती है।

क्रिया : यहाँ प्रथम सरल रेखा का समीकरण है :

$$\frac{x-1}{\cos 60°} = \frac{y-\sqrt{3}}{\sin 60°} = r$$

अर्थात् $$2(x-1) = \frac{2}{\sqrt{3}}(y-\sqrt{3}) = r$$

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण है

$$\sqrt{3}(x-1) - (y-\sqrt{3}) = 0$$

अर्थात् $$\sqrt{3}x - y = 0$$

इस रेखा पर बिन्दु $(1, \sqrt{3})$ से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P के निर्देशांक $\left(1+\frac{r}{2}, \sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ होंगे

मान लो यही बिन्दु इस रेखा तथा दूसरी रेखा $x+y\sqrt{3}=8$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है। तब ये निर्देशांक इस द्वितीय समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।

$$\therefore \left(1+\frac{r}{2}\right)+\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\sqrt{3}=8$$

अथवा $1+\frac{r}{2}+3+\frac{3}{2}r=8$

या $2r=4$

$\therefore \quad r=2$

अतः अभीष्ट दूरी $=2$ इकाई।

प्रश्नावली 3 (b)

1. उस रेखा द्वारा y-अक्ष से काटे हुए अन्तःखण्ड की लम्बाई तथा इसका x-अक्ष से झुकाव ज्ञात करो, जिसका समीकरण है—
   (i) $2x+7y=8$; (ii) $4y-3x+5=0$.
   (iii) $y-x+\sqrt{3}=0$ [राज., 64]
2. सरल रेखा $4x+3y=7$ निर्देशांक अक्षों को बिन्दु A और B पर काटती है। अन्तःखण्ड OA, OB की लम्बाई तथा कोण XAB और त्रिभुज AOB के क्षेत्रफल के मान ज्ञात करो।
3. निम्न समीकरण द्वारा निरूपित रेखा पर मूल बिन्दु से खींचे गए लम्ब की लम्बाई तथा x-अक्ष पर उसका झुकाव ज्ञात करो।
   (i) $x-\sqrt{3}y=5$; (ii) $7x-y+5=0$.
4. सरल रेखा $2x+3y=5$ द्वारा अक्षों के बीच में काटे हुए अन्तःखण्ड की लम्बाई तथा उसके मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो।
5. उन सरल रेखाओं के लेखाचित्र अंकित करो जिनके समीकरण है—
   (i) $2x+y=0$; (ii) $3x-4y=6$; (iii) $x+2y+3=0$

6. एक सरल रेखा निर्देश अक्षों को विन्दु A तथा B पर काटती है। यदि AB की लम्बाई 5 इकाई हो और त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल 6 वर्ग इकाई हो तो रेखा का समीकरण ज्ञात करो और इसका लेखाचित्र खींचो।

7. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(2, -3)$ में से गुजरती है और x अक्ष से $120°$ का कोण बनाती है।

8. यदि समीकरण $4x+3y-5=0$ और $2lx-my=8$ एक ही रेखा को निरूपित करें तो अचर राशियों l तथा m के मान ज्ञात करो।

9. निम्नलिखित विन्दुओं को मिलाने वाली रेखाओं की प्रवणता (gradient) ज्ञात करो :
   (i) $(0,0), (3,-7)$; (ii) $(4,3), (5,2)$;
   (iii) $(a,b), (-a,-b)$; (vi) $(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2)$

10. निम्न विन्दु-युग्मों में से गुजरने वाली रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो :
   (i) $(0,0), (3,-4)$; (ii) $(-5,2), (4,-1)$;
   (iii) $(-2,-3), (5,4)$

11. निम्न विन्दुओं में से गुजरने वाली सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञा
   करो :
   (i) $(0,a)$ तथा $(-b,0)$; (ii) (a,b) तथा $(a+b, a-$
   (iii) $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$, तथा $(a \cos \beta, a \sin \beta$

12. सिद्ध करो कि निम्न विन्दु समूह समरेख हैं। उनको मिलाने
   रेखा का समीकरण ज्ञात करो :
   (i) $(5,1)$ $(1,-1)$ और $(11,4)$;
   (ii) $(0,1), (1,2)$ और $(-2,-1)$;
   (iii) (a,b), (a',b'), $(a-a', b-b')$ जबकि a
   यह भी सिद्ध करो कि इनको मिलाने वाली रेखा मूल विन्दु से गु

13. उस आयत के कर्णों के समीकरण ज्ञात करो जिसकी
   समीकरण हैं : $x=a$; $x=b$; $y=c$; $y=d$.

14. उस त्रिभुज की भुजाओं के समीकरण ज्ञात करो जिसके शीर्षों के निर्देशांक हैं;

    (*i*) $(0, 0), (2\ 3), (-4, 5)$;

    (*ii*) $(-1, -2), (3, 0), (5, 2)$.

15. एक त्रिभुज ABC के शीर्ष क्रमशः $A\ (10, 4)$, $B\ (-4, 9)$ तथा $C\ (-2, -1)$ हैं। A से गुजरने वाली इसकी माध्यिका का समीकरण ज्ञात करो।

16. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु (a, b) और (a', b') के बीच की दूरी तथा $(-a, b)$ और $(a', -b')$ के बीच की दूरी का समद्विभाजन करती है।

17. उस रेखा AB का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $A\ (1, -2)$ से गुजरती है तथा x-अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है; इस रेखा द्वारा बिन्दु A तथा रेखा $x-3y+5=0$ के बीच में से काटे हुये अन्तः खण्ड की लम्बाई भी ज्ञात करो।

18. वह दिशा ज्ञात करो जिसमें बिन्दु $A\ (1, 2)$ से गुजरती हुई एक सरल रेखा AB खींची जाए जिससे रेखा $x+y=4$ तथा AB के प्रतिच्छेद बिन्दु की बिन्दु $(1, 2)$ से दूरी $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ हो। [राज; 58]

19. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $A\ (2, 3)$ से गुजरती है और x-अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है। यदि यह रेखा $x+y+1=0$ को बिन्दु B पर काटती है, तो AB की लम्बाई ज्ञात करो। [राज; 62]

20. एक सरल रेखा जो बिन्दु $P\ (1, 2)$ में से गुजरती है रेखा $x-2y+4=0$ को बिन्दु Q पर मिलती है। यदि PQ दूरी $\sqrt{2}$ हो तो प्रथम रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 3 (c)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. x-अक्ष के साथ $60°$ का कोण बनाने वाली तथा y-अक्ष की ऋण दिशा से 4 इकाई के बराबर अन्तःखण्ड काटने वाली रेखा का समीकरण है—

   (A) $\sqrt{3}y+x-4=0$ (B) $y-\sqrt{3}x+4=0$

   (C) $y+\sqrt{3}x-4=0$ (D) $\sqrt{3}y-x+4=0$ ( )

2. समीकरण $x+\sqrt{3}y+5=0$ द्वारा x-अक्ष की धन दिशा के साथ बनाया हुआ कोण है—

   (A) $30°$ (B) $60°$

   (C) $120°$ (D) $150°$ ( )

3. x-अक्ष तथा y-अक्ष से क्रमशः 3 व 2 इकाई के अन्तःखण्ड काटने वाली रेखा का समीकरण है—

   (A) $2x-3y=6$ (B) $3x+2y=1$

   (C) $2x+3y=6$ (D) $2x+3y=1$ ( )

4. सरल रेखा $3x+4y=5$ द्वारा अक्षों के बीच में आए हुए अन्तःखण्ड की लम्बाई है—

   (A) $\frac{25}{12}$ (B) 1 (C) 5 (D) $\frac{12}{5}$ ( )

5. किसी सरल रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब 4 इकाई के बराबर है तथा x-अक्ष के साथ यह $135°$ का कोण बनाता है उस रेखा का समीकरण होगा—

   (A) $x-y=4\sqrt{2}$ (B) $y-x=4\sqrt{2}$

   (C) $x+y=2\sqrt{2}$ (D) $y-x=2\sqrt{2}$ ( )

6. उस सरल रेखा का समीकरण निम्न हैं जो बिन्दु $(3, 5)$ में से गुजरती है तथा अक्षों से समान अंत.खण्ड काटती है—

   (A) $3x+5y=8$ (B) $5x+3y=8$

   (C) $x+y=8$ (D) $y+x=2$ ( )

7. यदि समीकरण $2x+\sqrt{3}\,y-4=0$ को झुकाव रूप में रखा जाए तो अचर राशियों के मान निम्न होंगे—

(A) $m=-2;\ c=4$ (B) $m=\frac{2}{\sqrt{3}};\ c=-\frac{4}{\sqrt{3}}$

(C) $m=\frac{\sqrt{3}}{2};\ c=2$ (D) $m=-\frac{2}{\sqrt{3}};\ c=\frac{4}{\sqrt{3}}$ ( )

8. $x+\sqrt{3}y=4$ को लम्ब रूप में बदलने पर अचर राशि p तथा α के निम्न मान होंगे—

(A) $p=2;\ \alpha=30^\circ$ (B) $p=2;\ \alpha=60^\circ$

(C) $p=4;\ \alpha=30^\circ$ (D) $p=4;\ \alpha=60^\circ$ ( )

9. विन्दु $(-1, 2)$ में से होकर जाने वाली किसी सरल रेखा का समीकरण होगा—

(A) $y-2=m(x-1)$ (B) $y+2=m(x-1)$

(C) $y-2=m(x+1)$ (D) $y+2=m(x+1)$ ( )

10. विन्दु $(-5, 3)$ तथा $(2, 1)$ को मिलाने वाली सरल रेखा का झुकाव होगा—

(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{2}{7}$ (C) $-\frac{7}{2}$ (D) $-\frac{3}{4}$ ( )

11. मूल विन्दु को विन्दु $(-1, -5)$ से मिलाने वाली रेखा का समीकरण होगा—

(A) $5x-y=0$ (B) $5x+y=0$

(C) $x+y+6=0$ (D) $x+y-6=0$ ( )

12. विन्दु $(1, -10)$ तथा $(4, 5)$ को मिलाने वाली सरल रेखा x-अक्ष को निम्न विन्दु पर मिलती है—

(A) $(-3, 0)$ (B) $(3, 0)$

(C) $(-21, 0)$ (D) $(21, 0)$

13. बिन्दु $(-10, -2)$ और $(4, 5)$ को मिलाने वाली रेखा को y-अक्ष निम्न अनुपात में काटती है—

(A) $3 : 5$ (B) $5 : 2$

(C) $2 : 5$ (D) $1 : 2$ ( )

विविध प्रश्नावली 3 (d)

(राजस्थान बोर्ड की परीक्षा के प्रश्न)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. समीकरण $x \times \frac{1}{2} + y \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5$ द्वारा निरूपित सरल रेखा है— [1967]

(A) झुकाव रूप (Slope form) में

(B) अन्तः खण्ड रूप (Intercept form) में

(C) लम्ब रूप (Perpendicular form) में

(D) उपरोक्त रूपों में से कोई भी नहीं। ( )

2. रेखा $3x - 4y - 4 = 0$ के x व y अक्षों पर अन्तःखण्ड क्रमशः होंगे— [1967]

(A) $\frac{4}{3}$ और -1 (B) $\frac{4}{3}$ और 1

(C) $\frac{3}{4}$ और -1 (D) $\frac{3}{4}$ और 1 ( )

3. बिन्दु $(-7, -4)$ तथा $(1, 2)$ को मिलाने वाली सरल रेखा की प्रवणता होगी— [1967]

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{4}{3}$ ( )

4. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(5,2)$ में होकर जाती है तथा अक्षों से समान अन्तःखण्ड काटता है। [1968]

(..................)

5. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो अक्षों पर बराबर अन्तःखण्ड काटती हो और बिन्दु (4, 5) में होकर जाती हो। [1969]
(................)

6. बिन्दु (−5, −4) तथा (9, 2) को मिलाने वाली सरल रेखा का झुकाव (Slope) है— [1970]
(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) -2 ( )

7. सरल रेखा $x+\sqrt{3}y+3=0$ का y अक्ष पर अन्तःखण्ड है– [1970]
(A) 3 (B) -3 (C) $\sqrt{3}$ (D) $-\sqrt{3}$ ( )

8. सरल रेखा $2x-3y=6$ द्वारा क्रमशः x और y अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्ड हैं— [1971]
(A) 2 और -3 (B) $\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{2}$
(C) 3 और -2 (D) $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ ( )

9. सरल रेखा $3x+4y=5$ की प्रवणता है— [1972]
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{4}{3}$ ( )

10. रेखा $7x+8y-5=0$ के लम्बवत रेखा की प्रवणता है— [1972]
(A) $\frac{7}{8}$ (B) $-\frac{7}{8}$ (C) $-\frac{8}{7}$ (D) $\frac{8}{7}$ ( )

(सैद्धान्तिक प्रश्न)

11. बिन्दु (4,5) तथा (−3,−2) को मिलाने वाली रेखा को x-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है ? [1968]
(................)

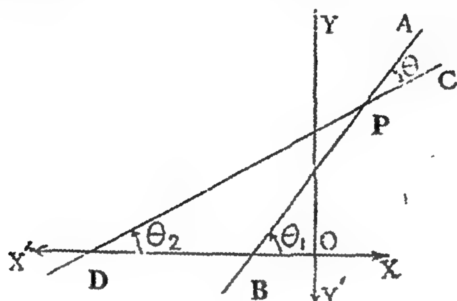
12. बिंदु (−3,4) तथा (−5,6) को मिलाने वाली रेखा को (*i*) x-अक्ष, (*ii*) y-अक्ष किस अनुपात मे विभाजित करेंगे। [1969]
(................)

4

सरल रेखा (क्रमशः)
Straight line (contd.)

4·0. दो दी हुई रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करना :

मान लोदी हुई रेखायें AB तथा CD हैं जो x-अक्ष को B तथा D



चित्र 28

बिन्दुओं पर काटती हैं। फिर मान लो रेखायें AB तथा CD, x-अक्ष से क्रमशः θ_1 तथा θ_2 कोण बनाती हैं और उनके बीच का कोण APC$=\theta$ है।

अब जैसा चित्र द्वारा स्पष्ट है $\quad \theta=\theta_1-\theta_2$

अवस्था I—मान लो रेखा AB तथा CD के समीकरण क्रमशः

$y=m_1x+c_1$ तथा $y=m_2x+c_2$ हैं। [राज., 68, 72]

जहाँ $\tan\theta_1=m_1$ तथा $\tan\theta_2=m_2$

अब $\quad \theta=\theta_1-\theta_2$

$\therefore \quad \tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)$

या $\quad \tan\theta=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$

या $\quad \boxed{\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$

अतः अभीष्ट कोण $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)$

टिप्पणी 1. यदि राशि $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ धनात्मक हो तो यह दोनों रेखाओं के बीच के न्यून कोण के tangent का मान होगी और यदि यह राशि ऋणात्मक हो तो यह रेखाओं के बीच के अधिक कोण के tangent का मान होगी।

टिप्पणी 2. दो रेखाओं के बीच में न्यून व अधिक दोनों कोणों के लिए सूत्र है—

$$\tan\theta=\pm\left(\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)$$

किन्तु संख्यात्मक प्रश्नों में हम साधारणतः धनात्मक मान ही लेते हैं।

टिप्पणी 3 विशेष अवस्था : यदि दोनों रेखाओं में से एक y-अक्ष के समान्तर हो तो कोण θ उपरोक्त सूत्र से ज्ञात नहीं किया जा सकता क्योंकि उस रेखा द्वारा OX से $90°$ का कोण निर्मित होता है और इसके फलस्वरूप m_1 अथवा m_2 अनन्त होता है। इस अवस्था में कोण चित्र की सहायता से अधिक सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

अवस्था II मान लो सरल रेखाओं के समीकरण व्यापक रूप में दिए हुए हैं $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$.

इन समीकरणों को स्पर्शज्या रूप (tangent-form) में रखने पर

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1} \text{ तथा } y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}$$

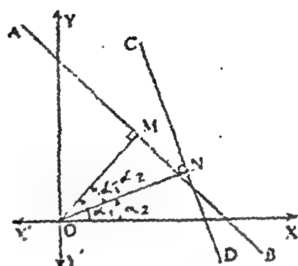
इस प्रकार यदि इन रेखाओं की प्रवणतायें m_1 तथा m_2 हो तो

$$m_1=-\frac{a_1}{b_1} \text{ और } m_2=-\frac{a_2}{b_2}$$

$\therefore$ रेखाओं के बीच का अभीष्ट कोण $=\tan^{-1}\left[\frac{-\frac{a_1}{b_1}-\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}{1+\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}\right]$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}}{1+\frac{a_1a_2}{b_1b_2}}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$



चित्र 29

अवस्था III—यदि रेखाओं के समीकरण

$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$

तथा $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$ रूप में दिये हुये हों तो इन रेखाओं पर मूल विन्दु से डाले गए लम्ब x-अक्ष से क्रमश: α_1 तथा α_2 कोण बनाते हैं। अत: (जब $\alpha_1>\alpha_2$) लम्बों के बीच का कोण $\alpha_1-\alpha_2$ होगा अतएव रेखाओं के बीच का कोण जिसमें मूल विन्दु स्थित है और जो इस कोण का संपूरक (supplementary) है $\pi-(\alpha_1-\alpha_2)$ होगा।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. उन दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करो जिनके समीकरण हैं :

$2y-3x+5=0$ तथा $4x+5y+8=0$

क्रिया : यहाँ $m_1=\frac{3}{2}$ तथा $m_2=-\frac{4}{5}$

$$\therefore \text{ अभीष्ट कोण}=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{2}-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1+\frac{3}{2}\left(-\frac{4}{5}\right)}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{5}}{1-\frac{12}{10}}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left(-\frac{23}{2}\right)$$

इस प्रकार रेखाओं के बीच के अधिक कोण के tangent का मान $-\frac{23}{2}$ है। अत: इसके बीच का न्यून कोण $=\tan^{-1}\left(\frac{23}{2}\right)$

उदाहरण 2. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात करो जो निम्न दो रेखाओं से समान कोण बनाती है।

$$3x+y+5=0 \text{ तथा } x-3y-4=0.$$

क्रिया : मान लो अभीष्ट प्रवणता m है।

अब दी हुई रेखाओं की प्रवणतायें क्रमशः -3 तथा $\frac{1}{3}$ हैं, क्योंकि वह रेखा जिसकी प्रवणता m है इन रेखाओं से समान कोण बनाती है।

$$\frac{m+3}{1-3m}=\frac{\frac{1}{3}-m}{1+\frac{1}{3}m}$$

अर्थात् $$\frac{m+3}{1-3m}=\frac{1-3m}{3+m}$$

तिर्यक गुणन द्वारा

$$(3+m)^2=(1-3m)^2$$

अथवा $(3+m)^2-(1-3m)^2=0$

अर्थात् $(3+m+1-3m)\ (3+m-1+3m)=0$

या $(4-2m)\ (4m+2)=0$

$\therefore m=2$ अथवा $m=-\frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट प्रवणता 2 अथवा $-\frac{1}{2}$ है।

4 1. दो रेखाओं के समान्तर होने का प्रतिबन्ध

यदि दो रेखायें परस्पर समान्तर हो तो उनके बीच का कोण शून्य होगा। अतः इस कोण के tangent का मान भी शून्य होगा।

अवस्था I—हम जानते हैं कि यदि रेखाओं के समीकरण

$y=m_1x+c_1$ तथा $y=m_2x+c_2$ हो तो

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

अतः रेखाओं के समान्तर होने के लिये अभीष्ट प्रतिबन्ध है

$$\boxed{m_1=m_2}$$

इस प्रकार दोनों रेखाओं की प्रवणतायें (m's) समान होनी चाहिये अर्थात् ऐसी रेखाओं के समीकरण परस्पर केवल अचर पदों में ही भिन्न होंगे।

अवस्था II – यदि रेखाओं के समीकरण

$a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ हों तो इनके बीच का

कोण $=\tan^{-1}\dfrac{a_2b_1-b_2a_1}{a_1a_2+b_1b_2}$

अतः रेखाओं के समान्तर होने के लिये

$$a_2b_1-b_2a_1=0$$

अथवा $$\boxed{\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}}$$

इस प्रकार समान्तर रेखाओं के समीकरणों में x तथा y के गुणांक समानुपाती होते है। विशेष स्थिति में ये गुणांक समान भी हो सकते हैं।

उदाहरणतः समीकरण $lx+my+n=0$ तथा $lx+my+n'=0$ दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करते हैं, क्योंकि ये केवल अपने अचर पदों में ही भिन्न हैं। यदि प्रथम रेखा को दिया हुआ माने तो दूसरी रेखा के समीकरण में प्रयुक्त अचर पद n' के मान संख्या में अनन्त हो सकते हैं। क्योंकि दी हुई रेखा के समान्तर अनन्त संख्या में रेखायें खींची जा सकती हैं और n' का मान प्रश्न में दिये गए विशेष प्रतिवन्ध से ज्ञात किया जा सकता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1 उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(-3, 4)$ से गुजरती है तथा सरल रेखा $5x-2y+7=0$ के समान्तर है।

क्रिया : प्रथम विधि:—बिन्दु $(-3, 4)$ से गुजरने वाली किसी रेखा का समीकरण है $\qquad y-4=m(x+3)$ ....(1)

इसकी प्रवणता m है तथा दी हुई रेखा की प्रवणता $\dfrac{5}{2}$ है।

$\therefore$ रेखा का अभीष्ट समीकरण $y-4=\dfrac{5}{2}(x+3)$ है।

अर्थात् $\qquad 5x-2y+23=0$ ....(2)

द्वितीय विधि : सरल रेखा $5x-2y+7=0$ के समान्तर किसी रेखा का समीकरण $5x-2y+c=0$ है। ....(3)

यदि यह रेखा विन्दु $(-3, 4)$ से गुजरती है तो इस विन्दु के निर्देशांक समीकरण (3) को संतुष्ट करेंगे।

$$\therefore \quad 5\times(-3)-2\times4+c=0$$

$$\therefore \quad c=23$$

अतः अभीष्ट समीकरण है

$$5x-2y+23=0$$

उदाहरण 2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(1, 2)$ से गुजरती है तथा विन्दु A $(4, -3)$ और B $(2, 5)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

क्रिया: विन्दु A $(4, -3)$ तथा B $(2, 5)$ से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता $=\frac{5+3}{2-4}=-4$ है।

अतः रेखा AB के समान्तर किसी भी रेखा की प्रवणता -4 ही होगी।

$\therefore$ बिंदु $(1, 2)$ से गुजरने वाली AB के समान्तर रेखा का समाकरण है : $\quad y-2=-4(x-1)$

अर्थात् $\quad y+4x-6=0$

4·2. दो सरल रेखाओं के परस्पर लम्ब होने का प्रतिबन्ध।

यदि दो रेखाएँ परस्पर लम्ब हों तो उनके बीच का कोण 90° होगा। अतः इसके tangent का मान अनन्त (∞) होगा।

अवस्था 1. यदि रेखाएँ $y=m_1x+c_1$ [राज०, 68, 72]
तथा $y=m_2x+c_2$ परस्पर लम्ब हो तो इनके बीच के कोण के tangent का मान

$\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ अनन्त होगा जिसके लिए $1+m_1m_2=0$

$$\boxed{m_1 m_2 = -1}$$

अर्थात

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

या

अर्थात् जब दो रेखाएँ परस्पर लम्ब हों तो इनकी प्रवणताओं ($m's$) का गुणनफल -1 के तुल्य होता है, अथवा एक की प्रवणता दूसरे की प्रवणता की व्युत्क्रम (reciprocal) तथा परिवर्तित चिह्न की होती है।

अवस्था 2. यदि दो सरल रेखाओं के समीकरण व्यापक रूप $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ में दिये हुए हों तो वे परस्पर लम्ब तब होंगी

$$\frac{a_2b_1-b_2a_1}{a_1a_2+b_1b_2}=\infty$$

जब

$$a_1a_2+b_1b_2=0$$

अर्थात

टिप्पणी : यहाँ प्रतिपादित प्रतिबन्ध द्वारा हम देखते हैं कि सरल रेखाएँ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad \text{....(1)}$$

तथा

$$b_1x-a_1y+c_2=0 \qquad \text{....(2)}$$

परस्पर लम्ब हैं क्योंकि उनकी प्रवणताओं $-\dfrac{a_1}{b_1}$ तथा $\dfrac{b_1}{a_1}$ का गुणनफल

$$-\frac{a_1}{b_1}\times\frac{b_1}{a_1}=-1 \text{ है।}$$

समीकरण (2) को (1) से प्राप्त करने के लिए हम x तथा y के गुणांकों को परस्पर परिवर्तित करके उनमें से एक का चिह्न भी बदल देते हैं ... (1) के अचर पद के स्थान पर दूसरा अचर पद रखते हैं। इस नये अचर ... के अनन्त मान हो सकते हैं क्योंकि दी हुई सरल रेखा के लम्ब, अनन्त संख्या ... रेखाएँ खींची जा सकती हैं। उनमें से एक की स्थिति नियत करने के ... हमको एक और प्रतिबन्ध की आवश्यकता होती है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(2, -1)$ से गुजरती है तथा रेखा $4x+3y+8=0$ के लम्ब है।

क्रिया : मान लो विन्दु $(2, -1)$ से गुजरने वाली किसी रेखा का समीकरण $y+1=m(x-2)$ है।

इसकी प्रवणता m है तथा दी हुई रेखा $4x+3y+8=0$ की प्रवणता $-\frac{4}{3}$ है। यदि ये परस्पर लम्ब हों तो

$$m \times -\frac{4}{3} = -1 \quad \text{जिससे } m = \frac{3}{4}$$

अतः अभीष्ट समीकरण होगा

$$y+1=\tfrac{3}{4}(x-2)$$

अर्थात् $$4y-3x+10=0$$ उत्तर

उदाहरण 2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(2, 1)$ तथा $(4, 3)$ के मिलाने वाली रेखा का लम्बअर्धक (perpendicular bisector) है।

क्रिया : विन्दु $(2, 1)$ तथा $(4, 3)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य विन्दु के निर्देशांक हैं $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ अर्थात् $(3, 2)$

तथा इस रेखा की प्रवणता $(m) = \frac{3-1}{4-2} = 1$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा की प्रवणता $= -1$

अब विन्दु $(3, 2)$ में से गुजरने वाली तथा -1 प्रवणता वाली रेखा का समीकरण है

$$y-2=-1(x-3)$$

$$\therefore \quad y+x-5=0.$$ उत्तर

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि विन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ से गुजरने वाली तथा सरल रेखा $x\sec\theta+y\,\mathrm{cosec}\,\theta=a$ पर लम्ब [illegible] का समीकरण $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$ है।

[राज., 49, 55,

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(2, -1)$ से गुजरती है तथा रेखा $4x+3y+8=0$ के लम्ब है।

क्रिया : मान लो विन्दु $(2, -1)$ से गुजरने वाली किसी रेखा का समीकरण $y+1=m(x-2)$ है।

इसकी प्रवणता m है तथा दी हुई रेखा $4x+3y+8=0$ की प्रवणता $-\frac{4}{3}$ है। यदि वे परस्पर लम्ब हों तो

$$m \times -\frac{4}{3} = -1 \text{ जिससे } m = \frac{3}{4}$$

अतः अभीष्ट समीकरण होगा

$$y+1=\tfrac{3}{4}(x-2)$$

अर्थात् $\quad 4y-3x+10=0$ उत्तर

उदाहरण 2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(2, 1)$ तथा $(4, 3)$ के मिलाने वाली रेखा का लम्बअर्धक (perpendicular bisector) है।

क्रिया : विन्दु $(2, 1)$ तथा $(4, 3)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य विन्दु के निर्देशांक हैं $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ अर्थात् $(3, 2)$

तथा इस रेखा की प्रवणता $(m)=\frac{3-1}{4-2}=1$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा की प्रवणता $=-1$

अब विन्दु $(3, 2)$ में से गुजरने वाली तथा -1 प्रवणता वाली रेखा का समीकरण है

$$y-2=-1(x-3)$$

$$\therefore \quad y+x-5=0.$$ उत्तर

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि विन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ से गुजरने वाली तथा सरल रेखा $x\sec\theta+y\,\text{cosec}\,\theta=a$ पर लम्ब सरल रेखा का समीकरण $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$ है।

[राज., 49, 55, 57 (s), 61]

क्रिया : सरल रेखा $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = a$ के लम्बवत् किसी रेखा का समीकरण है $x \operatorname{cosec}\theta - y \sec\theta = k$ जहाँ k कोई अचर राशि है।

अब यदि यह रेखा विन्दु $(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$ से गुजरे तो इस विन्दु के निर्देशांक इस समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

$$\therefore\ k = a\cos^3\theta \operatorname{cosec}\theta - a\sin^3\theta \sec\theta$$

$$k = a\left(\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{a}{\sin\theta\cos\theta} \times (\cos^4\theta - \sin^4\theta)$$

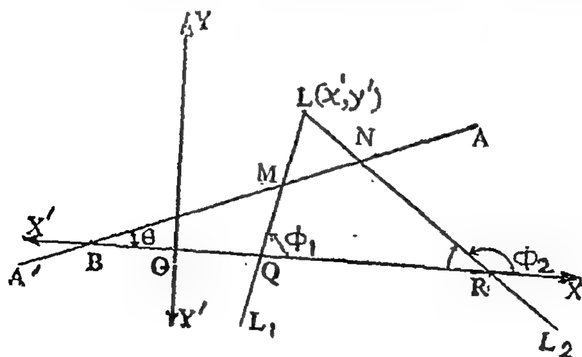
$$= \frac{a}{\sin\theta\cos\theta} \times (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= \frac{a}{\sin\theta\cos\theta} \times \cos 2\theta \times 1$$

$\therefore$ अभीष्ट समीकरण होगा $\dfrac{x}{\sin\theta} - \dfrac{y}{\cos\theta} = \dfrac{a\cos 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

अर्थात् $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta.$

4·3. उन दो सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात करना जो एक दिए हुये बिन्दु (x', y') से गुजरती हैं तथा एक दी हुई सरल रेखा $y = mx + c$ से एक दिया हुआ कोण α बनाती हैं।



चित्र 30

मान लो दिया हुआ विन्दु $L (x', y')$ है तथा दी हुई रेखा AB है जो x-अक्ष से θ कोण बनाती है जिससे

$$\tan \theta = m.$$

अब व्यापक रूप मे विन्दु L से गुजरने वाली ऐसी दो रेखाएँ LL_1 तथा LL_2 है जो AA' से ■ कोण बनाती हैं। किन्तु जब $\alpha = 90°$ होगा तो केवल ऐसी एक ही रेखा होगी।

मान लो LL_1 तथा LL_2, x-अक्ष से क्रमशः कोण ϕ_1 तथा ϕ_2 बनाती हैं। तब इन रेखाओ के समीकरण होंगे

$$y - y' = \tan \phi_1 \times (x - x')$$

तथा $$y - y' = \tan \phi_2 \times (x - x')$$

अब जैसा चित्र से स्पष्ट है

$$\phi_1 = \theta + \alpha, \; \phi_2 = (180° - \alpha) + \theta$$

$$\therefore \quad \tan \phi_1 = \tan (\theta + \alpha) = \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = \frac{m + \tan \alpha}{1 - m \tan \alpha}$$

और $$\tan \phi_2 = \tan \{180° + (\theta - \alpha)\} = \tan (\theta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{m - \tan \alpha}{1 + m \tan \alpha}$$

अतः अभीष्ट समीकरण है

$$y - y' = \frac{m + \tan \alpha}{1 - m \tan \alpha} (x - x')$$

तथा $$y - y' = \frac{m - \tan \alpha}{1 + m \tan \alpha} (x - x')$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

(1) उदाहरण. उन सरल रेखाओ के समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(2, -3)$ से गुजरती हैं तथा सरल रेखा $3x - 2y = 4$ से $45°$ का कोण बनाती हैं।

क्रिया : विन्दु $(2, -3)$ से गुजरने वाली किसी रेखा का समीकरण हैं

$$y + 3 = m (x - 2) \qquad ....(i)$$

यदि यह रेखा दी हुई रेखा $3x-2y=4$ से 45° का कोण बनाती है तो

$$\tan 45^\circ = \pm\frac{m-\frac{3}{2}}{1+m\times\frac{3}{2}} = \pm\frac{2m-3}{2+3m}$$

अत्र (I) धन चिन्ह लेने पर

$$1=\frac{2m-3}{2+3m}$$

अथवा $2m-3=2+3m$ ....(*ii*)

$$\therefore m=-5$$

(II) ऋण चिन्ह लेने पर

$$1=\frac{-2m+3}{2+3m}$$ ....(*iii*)

अथवा $3m+2=3-2m$ जिससे $m=\frac{1}{5}$

(*ii*) तथा (*iii*) से प्राप्त m के मानों को (*i*) में प्रतिस्थापित करने पर अभीष्ट रेखा के समीकरण प्राप्त होते हैं

$y+3=-5(x-2)$ तथा $y+3=\frac{1}{5}(x-2)$

अर्थात् $y+5x-7=0$ तथा $5y-x+17=0$

प्रश्नावली 4 (a)

निम्नलिखित रेखा युग्मों के बीच के कोण ज्ञात करो (1 से 3 तक)—

1. $2x+y-5=0$ तथा $x+3y+7=0$.
2. $2x+3y-8=0$ तथा $4y-3x+2=0$.
3. $y=(2+\sqrt{3})x+5$ तथा $y=(2-\sqrt{3})x+1$.

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो (प्रश्न 4 से 10)–

4. विन्दु $(1,-2)$ से गुजरती है तथा सरल रेखा $7x-4y+2=$ समान्तर है।
5. विन्दु $(4, 3)$ से गुजरती है तथा रेखा $2x+3y-5=$ समान्तर है।

6. बिन्दु $(1, -3)$ से गुजरती है तथा बिन्दु $(2, -3)$ तथा $(-1, -2)$ से गुजरने वाली रेखा के समान्तर है
7. बिन्दु $(4, 5)$ से गुजरती है तथा रेखा $4x-3y+7=0$ पर लम्ब है ।
8. बिन्दु $(-6, 10)$ से गुजरती है तथा सरल रेखा $7x+8y=5$ पर लम्ब है ।
9. बिन्दु $(-2, 4)$ से गुजरती है तथा बिन्दु $(2, -3)$ तथा $(-4, 9)$ को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब है ।
10. बिन्दु $(-2, -3)$ तथा $(3, 4)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से गुजरती है तथा इस रेखा पर लम्ब है ।
11. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो रेखा $lx+my=n$ पर लम्ब हो तथा बिन्दु (h, k) से गुजरती हो ।
12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(3,4)$ तथा $(-2, -1)$ को मिलाने वाली रेखा को $2:3$ की निष्पत्ति में अन्तः विभाजित करे तथा इस पर लम्ब हो ।
13. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ पर उस बिन्दु पर लम्ब हो जहाँ यह y-अक्ष से मिलती है ।
14. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः $(-1, 1)$, $(3, 5)$ तथा $(4, 3)$ हैं । इसके शीर्ष लम्बों (altitudes) के समीकरण ज्ञात करो और प्रमाणित करो कि वे संगामी है । [राज., 67]
15. किसी वर्ग के शीर्ष $(1,2)$ से होकर जाने वाली दो भुजाओं के समीकरण ज्ञात करो यदि उस वर्ग के एक विकर्ण (diagonal) का समीकरण $8x-15y=0$ है । [राज., 58]
16. उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(2, 1)$ से गुजरती हैं तथा रेखा $3x+2y=7$ से $45°$ का कोण बनाती हैं ।

उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(3, -2)$ से गुजरती हों तथा रेखा $x+\sqrt{3}y=1$ से 60° का कोण बनाती हों।

उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(4, 5)$ से गुजरती हैं तथा रेखाओं $3x=4y+7$ और $5y=12x+6$ से समान कोण बनाती हैं।

19. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो विन्दुओं $(2, -3)$ और $(-1, 5)$ को मिलाने वाली रेखा को समकोण पर समद्विभाजित करती है। [राज., 67]

20. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में भुजाओं के मध्य विन्दुओं से उनके लम्बवत खींची हुई रेखाएँ एक विन्दु पर मिलती हैं।

21. सिद्ध करो कि उस रेखा का समीकरण जो मूल विन्दु से गुजरती है तथ रेखा $y=mx+c$ से θ कोण बनाती है निम्न होगा—

$$\frac{y}{x}=\frac{m+\tan\theta}{1-m\tan\theta}$$

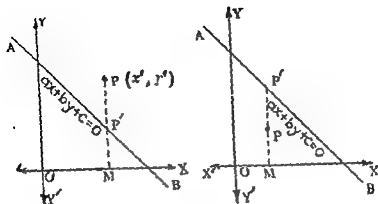
रेखा और बिन्दु

(Line and a point)

44. एक रेखा के सापेक्ष किसी दिये हुए विन्दु की स्थिति।

यदि विन्दु (x', y') रेखा $ax+by+c=0$ के एक ओर हो व्यंजक $ax'+by'+c$ धन होगा और यदि विन्दु दूसरी ओर हो तो व्यंजक ऋण होगा।

मान लो विन्दु $P(x', y')$, रेखा AB जिसका समीकरण $ax+by+$ है, के किसी एक ओर स्थित है। P से y-अक्ष के समान्तर रेखा खींचो जो दी हुई रेखा को (यदि आवश्यक हो तो बढ़ाने पर) P' में काटे। विन्दु P' का भुज=P का भुज=x' और P' (y) को हम P'M ही रखते हैं। अब P' दी हुई रेखा पर है।



चित्र 31

निर्देशांक $(x', P'M)$ इसके समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।

$$\therefore\ ax' + b\,P'M + c = 0$$

$$\therefore\ P' \text{ की कोटि } P'M = -\frac{ax' + c}{b}$$

यदि b एक धन राशि हो तो यह स्पष्ट है कि बिन्दु P के रेखा AB के ऊपर (एक ओर) अथवा नीचे (दूसरी ओर) होने के अनुसार

$PM > P'M$ अथवा $PM < P'M$

अर्थात् $y' >$ अथवा $< -\dfrac{ax' + c}{b}$

अर्थात् $by' + ax' + c >$ अथवा < 0

अर्थात् $ax' + by' + c >$ अथवा < 0

अतः $ax' + by' + c$ के धन अथवा ऋण होने के अनुसार बिन्दु (x', y') रेखा $ax + by + c = 0$ के एक ओर अथवा दूसरी ओर स्थित होगा।

टिप्पणी : यदि b ऋणात्मक हो तो ऊपर दी हुई असमताओं का चिह्न बदल जाता है किन्तु अन्तिम परिणाम अपरिवर्तित रहता है।

उपसाध्य 1. दो विन्दु (x', y') तथा (x'', y'') रेखा $ax+by+c=0$ के एक ही ओर होंगे यदि व्यंजक $ax'+by'+c$ तथा $ax''+by''+c$ के चिह्न समान हों और ये रेखा के विपरीत दिशा में होंगे यदि इन व्यंजकों के चिह्न परस्पर विपरीत हों।

उपसाध्य 2. विन्दु (x', y') तथा मूल विन्दु $(0, 0)$ रेखा $ax+by+c=0$ के एक ही ओर होंगे यदि व्यंजक $ax'+by'+c$ तथा $a\times 0+b\times 0+c$ अर्थात् अचर पद c का एक ही चिह्न हो। इस प्रकार विन्दु (x', y') के रेखा $ax+by+c=0$ से मूल विन्दु की ओर होने के लिए $ax'+by'+c$ का वही चिह्न होना चाहिए जो c का है। यदि व्यंजक $ax'+by'+c$ का चिन्ह c के चिह्न से विपरीत हो तो विन्दु (x', y') तथा मूल विन्दु रेखा $ax+by+c=0$ के विपरीत ओर होंगे।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. क्या विन्दु $(-3, 2)$ तथा $(2, 4)$ रेखा $2x-y+5=0$ के एक ही ओर हैं अथवा विपरीत ओर ?

क्रिया : यहां रेखा का समीकरण $2x-y+5=0$ है।

इसके वामपक्ष में प्रथम विन्दु के निर्देशांक $(-3, 2)$ प्रतिस्थापित करने पर

$2\times(-3)-2+5=-6-2+5=-3$ जो एक ऋण राशि है। फिर द्वितीय विन्दु के निर्देशांक $(2, 4)$ इसी समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर $2\times 2-4+5=5$ जो एक धन राशि है। क्योंकि इस प्रकार प्राप्त राशियां विपरीत चिन्ह की हैं, अतः दिए हुए विन्दु रेखा के विपरीत ओर होंगे।

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि विन्दु $(-1, -2)$ रेखा $2x-y+3=0$ के उसी ओर स्थित हैं जिस ओर मूल विन्दु है।

क्रिया : रेखा की समीकरण के वामपक्ष में निर्देशांक $(-1, -2)$ प्रतिस्थापित करने पर

$-2+2+3=3$ जो धनात्मक है और इस प्रकार इसका चिन्ह वही है जो समीकरण के अचरपद 3 का है। अतः अभीष्ट स्थिति सिद्ध होती है।

लम्ब की लम्बाई

(Length of perpendicular)

4·5. एक दिए हुए बिन्दु से किसी दी हुई रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना।

चित्र 32

अवस्था I. मान लो दिया हुआ बिन्दु P (x', y') है तथा दी हुई रेखा AB का समीकरण है—

$$x \cos a + y \sin a - p = 0 \qquad ....(1)$$

मूल बिन्दु से इस पर डाला गया लम्ब OL है जिससे OL$=p$ तथा $\angle XOL = a$

बिन्दु P से रेखा AB पर लम्ब PQ डालो जिसकी लम्बाई ज्ञात करनी है।

[यहाँ बिन्दु (x', y') और मूल बिन्दु रेखा AB के विपरीत ओर स्थित माने गए हैं]

अब बिन्दु P से रेखा AB के समान्तर रेखा CD खींचो। मूल बिन्दु से AB पर डाले गए लम्ब OL को आगे बढ़ाकर CD से M बिन्दु पर मिलने दो। मान लो OM$=p'$ तब रेखा CD का समीकरण होगा—

$$x \cos a + y \sin a - p' = 0 \qquad ....(2)$$

क्योंकि रेखा (2) विन्दु (x', y') में होकर जाती है

$$\therefore \quad x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p' = 0 \qquad ....(3)$$

या $\quad p' = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha$

अब विन्दु P से रेखा AB पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$= PQ = ML = OM - OL$$

$$= p' - p = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p$$

अतः लम्ब की अभीष्ट लम्बाई रेखा के समीकरण के वाम पक्ष में x, y के स्थान पर सीधे x', y' रखने पर प्राप्त हो जाती है।

टिप्पणी : यदि बिन्दु (x', y') और मूल विन्दु रेखा AB के एक ही ओर स्थित हों तो सिद्ध किया जा सकता है कि लम्ब की लम्बाई

$$= -(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p)$$

अवस्था II. मान लो दी हुई रेखा का समीकरण है

$$ax + by + c = 0 \qquad ....(1)$$

इस समीकरण को हम $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ के रूप में परिणित करने पर (अनुच्छेद 3·5 देखो) लिख सकते हैं :

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \qquad ....($$

जिससे $\cos \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ तथा $p = \dfrac{-}{\sqrt{a^2}}$

उपरोक्त सूत्र के अनुसार विन्दु (x', y') से (2) पर डाले गए लम्ब की

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p$$

इस प्रकार बिन्दु (x', y') से रेखा $ax+by+c=0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई व्यंजक $ax+by+c$ में x व y के स्थान पर x', y' रख कर तथा इस प्रकार प्राप्त परिणाम को $\sqrt{a^2+b^2}$ से विभाजित करने पर प्राप्त होती है। $ax+by+c$ को इस प्रकार रखना चाहिए कि c सर्वदा ऋणात्मक हो क्योंकि तभी p का चिन्ह धनात्मक होगा।

लम्ब की लम्बाई बिंदु (x', y') के रेखा के एक ओर अथवा दूसरी ओर होने के अनुसार धन व ऋण होगी।

अतः

$$\text{लम्ब की लम्बाई (पूर्ण सूत्र)} = \pm\frac{ax'+by'+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

उपसाध्य 1 : रेखा $ax+by+c=0$ पर मूल बिन्दु $(0, 0)$ से डाले गए लम्ब की लम्बाई$=\dfrac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

उपसाध्य 2 : दो समान्तर रेखाओं $ax+by+c_1=0$ तथा $ax+by+c_2=0$ के बीच की लम्ब की लम्बाई दोनो रेखाओं पर मूल बिंदु से डाले हुए लम्बों की लम्बाई के अन्तर के बराबर होगी अर्थात् $\dfrac{c_1-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$। यह दूरी एक रेखा पर कोई उचित बिन्दु लेकर उससे दूसरी रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई के रूप में भी प्राप्त हो सकती है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. बिन्दु $(2, -3)$ से रेखा $12x+5y-3=0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात करो।

क्रिया : यहां दी हुई रेखा पर डाले गए लम्ब की अभीष्ट लम्बाई

$$=\frac{12\times 2+5\times(-3)-3}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{6}{\sqrt{169}}=\frac{6}{13}$$

उदाहरण 2. रेखाओं $3x-2y-1=0$ और $6x+9=4y$ के बीच की लम्बाई ज्ञात करो।

क्रिया : रेखाओं के समीकरण लिखे जा सकते हैं—

$$3x-2y-1=0$$

तथा $\quad 6x-4y+9=0$ अथवा $3x-2y+\frac{9}{2}=0$

ये रेखायें परस्पर समान्तर हैं।

∴ रेखाओं के बीच के लम्ब की दूरी

$$=\frac{1+\frac{9}{2}}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{11}{2\sqrt{13}}$$

अथवा प्रथम रेखा पर बिन्दु $(\frac{1}{3}, 0)$ लेकर इससे दूसरी रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$=\frac{6\times\frac{1}{3}-4\times 0+9}{\sqrt{16+36}}=\frac{11}{2\sqrt{13}} \text{ (संख्यात्मक)}$$

उदाहरण 3. यदि मूल बिन्दु से सरल रेखाओं

$$x\sec\theta+y\operatorname{cosec}\theta=a$$

तथा $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$ पर डाले गए लम्बों की लम्बाई क्रमशः p और p' हों तो सिद्ध करो कि $4p'^2+p^2=a^2$[राज., बोर्ड 58, 60]

क्रिया : मूल बिन्दु से रेखा $x\sec\theta+y\operatorname{cosec}\theta-a=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$p=\frac{a}{\sqrt{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}}}=a\sin\theta\cos\theta$$

फिर मूल बिन्दु से रेखा $x \cos \theta - y \sin \theta = a \cos 2\theta$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$p' = \frac{a \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = a \cos 2\theta$$

$$\therefore\ 4p^2 + p'^2 = 4(a \sin \theta \cos \theta)^2 + (a \cos 2\theta)^2$$
$$= (2a \sin \theta \cos \theta)^2 + (a \cos 2\theta)^2$$
$$= (a \sin 2\theta)^2 + (a \cos 2\theta)^2$$
$$= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) = a^2$$

उदाहरण 4. बिन्दु $(1, 2)$ से सरल रेखा $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ पर डाले गए लम्ब पर मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए। [राज. बोर्ड., 65]

क्रिया : दी हुई रेखा $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ पर किसी लम्ब रेखा का समीकरण है

$$\sqrt{3}x + y + c = 0 \qquad ....(1)$$

यदि यह बिन्दु $(1, 2)$ से गुजरती है तो $\sqrt{3} + 2 + c = 0$

जिससे $\quad c = -(\sqrt{3} + 2)$

$\therefore$ समीकरण (1) बन जाता है

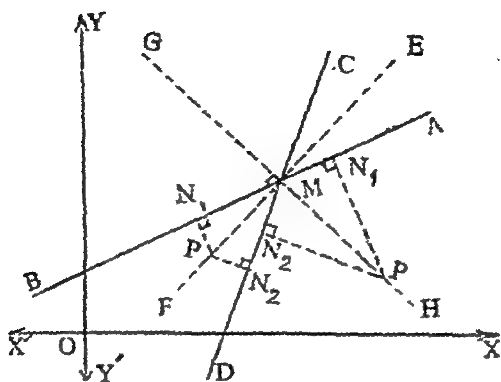
$$\sqrt{3}x + y - (\sqrt{3} + 2) = 0 \qquad ....(2)$$

अब रेखा (2) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई है

$$= \frac{-(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3 + 1}} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} \text{ (संख्यात्मकतः)}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट लम्ब की लम्बाई} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

4·6. दो दी हुई सरल रेखाओं के बीच के कोणों के अर्धकों के समीकरण ज्ञात करना।



चित्र 33

मान लो दी हुई रेखाएं AB तथा CD हैं, ये परस्पर विन्दु M पर मिलती हैं तथा इनके समीकरण क्रमशः निम्न हैं—

$a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ .... (1)

जहाँ c_1 तथा c_2 के एक ही चिन्ह है (दोनों धन अथवा दोनों ऋण)। मान लो AB तथा CD के बीच के कोणों के अर्धक EF तथा GH हैं।

जैसा चित्र से स्पष्ट है EF उस कोण का अर्धक है जिसमें मूल विन्दु स्थित है।

मान लो अर्धकों में से किसी एक पर कोई विन्दु P है जिसके निर्देशांक (x', y') हैं। P से AB तथा CD पर क्रमानुसार लम्ब PN_1 तथा PN_2 खींचो।

अब क्योंकि विन्दु P, M पर बने कोण के अर्धक पर स्थित है P से AB तथा CD पर डाले गये लम्ब परिणाम में बराबर होंगे अर्थात्

$$PN_1=\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \text{ तथा } PN_2=\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad .... (2)$$

जहां करणीगत राशियों $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$ तथा $\sqrt{a_2^2+b_2^2}$ का धनात्मक मान ही लिया गया हो, परिमाण में बराबर हैं। अब दो अवस्थाएं उपस्थित होती हैं।

अवस्था I जब P अर्धक EF पर स्थित होता है अर्थात् जब P और मूल बिन्दु रेखा AB तथा CD के एक ही ओर होते हैं तो राशियां $\dfrac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$ तथा $\dfrac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ दोनों एक ही चिन्ह की होंगी क्योंकि इनका चिन्ह अनुच्छेद 4·4 के अनुसार वही होगा जो क्रमशः c_1 तथा c_2 का है और ये (c_1 तथा c_2) एक ही चिन्ह के माने गये हैं। ....(3)

$$\therefore \quad \frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

अवस्था II. जब P अर्धक GH पर स्थित है अर्थात् जब यह रेखा AB तथा CD में से एक के उस ओर ही स्थित है जिस ओर मूल बिन्दु है किन्तु दूसरी के मूलबिन्दु से विपरीत ओर तो राशियां (2) विपरीत चिह्न की होंगी।

$$\therefore \quad \frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

अतः बिन्दु P (x', y') का बिन्दुपथ अर्थात् रेखाओं $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ के बीच के कोणों के अर्धकों के समीकरण हैं

$$\boxed{\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$$

इनमें दाईं ओर के धन (+) चिह्न लेने से प्राप्त समीकरण उस कोण का अर्धक है जिसमें मूल बिन्दु स्थित है तथा दक्षिण पक्ष के ऋण (−) चिह्न को लेने से प्राप्त समीकरण दूसरे कोण का अर्धक है जिसमें मूलबिन्दु नहीं है।

उपसाध्य : कोणों के ये दो अर्धक परस्पर लम्बवत है।

टिप्पणी : अर्धकों को दोनों रेखाओं से समान दूरी दर स्थित विन्दुओं के विन्दुपथ भी कह सकते हैं।

4·61. दो रेखाओं के बीच के न्यूनकोण व अधिक कोण के अर्धक ज्ञात करना।

न्यूनकोण का अर्धक दोनों रेखाओं से 45° से कम का कोण बनाता है। अतः हम पहिले अर्धक और दोनों रेखाओं में से एक रेखा के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) का मान ज्ञात करते हैं। यदि यह इकाई से कम हों तो यह अर्धक न्यूनकोण का होगा और दूसरा अर्धक (जिसके लिए यह स्पर्शज्या इकाई से अधिक है) अधिक कोण का होगा।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. रेखाओं $3x-4y+1=0$ तथा $5x+12y+7=0$ के मध्यस्थ कोणों के अर्धकों के समीकरण ज्ञात करो तथा सिद्ध करो कि वे परस्पर लम्ब हैं।

क्रिया : दी हुई रेखाओं के बीच के कोणों के अर्धकों के समीकरण हैं :—

$$\frac{3x-4y+1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{5x+12y+7}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

अर्थात

$$\frac{3x-4y+1}{5}=\pm\frac{5x+12y+7}{13}$$

अर्थात् $13(3x-4y+1)=\pm 5(5x+12y+7)$

अथवा $14x-112y-22=0$ तथा $64x+8y+48=0$

अतः अभीष्ट समीकरण हैं

$$7x-56y-11=0$$

तथा

$$8x+y+6=0$$

इनमें से (1) की प्रवणता $=\frac{7}{56}=\frac{1}{8}$ तथा दूसरे की प्रवणता $=$

इस प्रकार इनकी प्रवणताओं का गुणनफल $=\frac{1}{8}\times(-8)=-$

अतः ये अर्धक परस्पर लम्ब हैं।

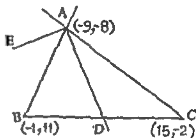
उदाहरण 2. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(-9, -8)$, $(-1, 11)$ तथा $(15, -2)$ हों तो प्रथम शीर्ष पर बने हुए कोणों के आन्तरिक अर्धक व वाह्यअर्धक के समीकरण ज्ञात करो।

क्रिया : मान लो त्रिभुज के दिए हुए शीर्ष क्रमशः A, B तथा C हैं।

अब रेखा AB तथा AC के समीकरण होंगे :

$$y+8=\frac{11+8}{-1+9}(x+9)$$

तथा $y+8=\dfrac{-2+8}{15+9}(x+9)$



चित्र 34

अर्थात् $19x-8y+107=0$ ....(1)

तथा $4y-x+23=0$ ....(2)

अतः AB तथा AC के बीच के कोणों के अर्धकों के समीकरण हैं :

$$\frac{19x-8y+107}{\sqrt{19^2+8^2}}=\pm\frac{4y-x+23}{\sqrt{4^2+1^2}}$$

अर्थात्

$$\frac{19x-8y+107}{\sqrt{425}}=\pm\frac{4y-x+23}{\sqrt{17}}$$

अथवा $19x-8y+107=\pm 5(4y-x+23)$

अर्थात् $6x-7y-2=0$ ....(3)

तथा $7x+6y+111=0$ ....(4)

अब चित्र को देखने से प्रतीत होगा कि विन्दु B तथा C, कोण A के आन्तरिक अर्धक के विपरीत ओर हैं। फिर B के निर्देशांकों को (3) के वाम पक्ष में रखने पर हम देखते हैं कि इस पक्ष का मान

$$=6\times(-1)-7\times 11-2=-85$$

अर्थात् ऋण है और फिर C के निर्देशांकों को (3) के वाम पक्ष में रखने पर इसका मान

$$=6\times 15-7\times(-2)-2=102$$

एक धन राशि है। ये विपरीत चिन्ह प्रदर्शित करते हैं कि विन्दु B तथा C अर्धक $6x-7y-2=0$ के विपरीत ओर हैं अर्थात् कोण A के आन्तरिक अर्धक का समीकरण $6x-7y-2=0$ है।

विन्दु B तथा C के निर्देशांकों को दूसरे समीकरण अर्थात् $7x+6y+111=0$ में रखने से हम देखते हैं कि प्राप्त राशियां $7\times(-1)+6\times 11+111=170$ तथा $7\times 15+6\times(-2)+111=204$ दोनों धनात्मक है।

अतः विन्दु B तथा C दोनों ही इस अर्धक के एक ही ओर हैं। इस प्रकार यह समीकरण कोण A के वाह्यअर्धक को निरूपित करता है।

प्रश्नावली 4 (b)

1. ज्ञात करो कि विन्दु (4, 3) रेखा $3x-8y+5=0$ के उस ही ओर है जिस ओर मूल विन्दु है अथवा इसके विपरीत ओर।
2. बताओ विन्दु (4, 1) और (8, 5) रेखा $x-2y+3=0$ के एक ही ओर हैं अथवा विपरीत ओर।
3. सिद्ध करो कि वह त्रिभुज जिसके शीर्ष (3, 7), (−3, −1), (−1, −1) हैं रेखा $2x-8y=7$ के पूर्णतया एक ही ओर है।
4. सिद्ध करो कि मूल विन्दु (2, 4), (−2, 1) और (1, −3) शीर्ष वाले त्रिभुज के अन्दर स्थित है।

निम्न अवस्थाओं में लम्ब की लम्बाई ज्ञात करो (प्र. 5 से 10 तक)

5. मूल बिन्दु से रेखा $3x-4y+10=0$ पर।
6. बिन्दु $(3, -1)$ से रेखा $4x-5y-1=0$ पर।
7. बिन्दु $(-4, -3)$ से रेखा $7x-24y-9=0$ पर।
8. बिन्दु (b, a) से रेखा $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ पर।
9. बिन्दु $(2, 5)$ से बिन्दु $(-2, 1)$ तथा $(2, 4)$ को मिलाने वाली रेखा पर।
10. मूल बिन्दु से बिन्दु $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ तथा $(a \cos \beta, a \sin \beta)$ को मिलाने वाली रेखा पर।
11. निम्नलिखित समान्तर रेखा युग्मो के बीच की लम्ब दूरी ज्ञात करो।
    (i) $3x+4y+15=0$ तथा $3x+4y+6=0$
    (ii) $y=mx+c$ तथा $y=mx+d$
12. सरल रेखा $3x+4y-5=0$ पर बिन्दु (3,2) से डाले गए लम्ब की मूल बिन्दु से लम्ब दूरी ज्ञात करो।
13. यदि सरल रेखाओं $24x-7y-15=0$ तथा $3x-4y-7=0$ पर किसी बिन्दु से डाले गए लम्बों की लम्बाई बराबर हों तो सिद्ध करो कि यह बिन्दु रेखा $9x+13y+20=0$ पर स्थित होगा।
14. सिद्ध करो कि सरल रेखा $7x+4y=3$ पर स्थित किसी बिन्दु से दो सरल रेखाओ $3x-4y=2$ और $5x-12y=4$ पर डाले गए लम्ब परस्पर बराबर हैं।
15. यदि निर्देश अक्षो से a तथा b लम्बाईयों के अंतःखंड काटने वाली रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत दूरी p हो तो सिद्ध करो कि—

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

[राज. बोर्ड; 63]

...न लिखित रेखाओं के मध्यस्थ कोणों के अर्धकों के समीकरण ज्ञात करो था इनमें से उन कोणों के अर्धकों को पहिले रखो जिनमें मूल विंदु स्थित हैं। (प्रश्न 16 से 19)

... $3x-2y+1=0$ और $18x+y-5=0$.

... $4x+3y-7=0$ और $24x+7y-31=0$.

18. $x+y\sqrt{3}=2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ और $x-y\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$.

19. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ तथा $x\cos\beta+y\sin\beta=q$ जहां p तथा q एक ही चिन्ह के हैं। सिद्ध करो कि ये अर्धक परस्पर लम्बवत हैं।

20. एक त्रिभुज के शीर्ष $(2, -2)$, $(8, -2)$, तथा $(8, 6)$ हैं। शी... $(8,6)$ पर बने कोण के आन्तरिक अर्धक का समीकरण ज्ञात करो।

21. रेखाओं $x+2y-3=0$ और $3x-y+2=0$ से बराबर दूरी वाले विन्दुओं का विन्दुपथ ज्ञात करो।

उन त्रिभुजों के अन्तःकेन्द्र के निर्देशांक बताओ जिनके शीर्षक है :

22. विन्दु $(3, 1)$, $(1, -2)$ तथा $(-1, \frac{8}{3})$

23. विन्दु $(2, 3)$, $(-1, 4)$ तथा $(3, 5)$

24. तीन सरल रेखाओं के समीकरण $15x-18y+1=0$; $12x+10y-3=0$ तथा $6x+66y-11=0$ हैं। सिद्ध करो कि तृतीय रे... प्रथम दो रेखाओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

[राज. बोर्ड; ...

25. सिद्ध करो कि विन्दु $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ से सरल रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$ पर डाले गये लम्बों का गुणनफल b...

[राज. बो...

रेखाओं का प्रतिच्छेदन
(Intersection of straight lines)

4·7. दो दी हुई सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु (point of intersection) के निर्देशांक ज्ञात करना।

मान लो दी हुई सरल रेखाओं के समीकरण है—

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad \text{—(1)}$$

तथा

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad \text{—(2)}$$

इनका प्रतिच्छेद बिन्दु इन दोनों रेखाओं पर स्थित है; अतः इसके निर्देशांक इन दोनों के समीकरणों को सन्तुष्ट करेंगे। केवल यही एक बिन्दु ऐसा होगा जो दोनों रेखाओं पर स्थित होगा। अतः इन दो रेखाओं के समीकरणों को बीजगणित के युगपद् समीकरणों (simultaneous equations) की भांति हल करने से प्राप्त x तथा y के मान रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु के अभीष्ट निर्देशांक होंगे।

समीकरण (1) तथा (2) को त्रिगुण गुणन की विधि से हल करने पर प्राप्त होता है—

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ तथा } y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

जो प्रतिच्छेद बिन्दु के अभीष्ट निर्देशांक है।

उपसाध्य : यदि $a_1b_2-a_2b_1=0$ किन्तु $b_1c_2-b_2c_1\neq0$ अथवा $c_1a_2-c_2a_1\neq0$ तो प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक अनन्त होंगे और रेखायें परस्पर अनन्त दूरी पर मिलेंगी अर्थात् वे परस्पर समान्तर होंगी।

इस प्रकार यदि $a_1b_2-a_2b_1=0$ अर्थात् $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

तो रेखाएँ समान्तर होंगी किन्तु यदि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ तो रेखाएँ संपाती (coincident) होंगी।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. निम्न रेखाओं के प्रतिच्छेद विन्दु के निर्देशांक ज्ञात करें
$3x+5y-2=0$ तथा $4x-2y+7=0$

क्रिया : वज्रगुणन द्वारा इन समीकरणों को हल करने पर

$$\frac{x}{35-4}=\frac{y}{-8-21}=\frac{1}{-6-20}$$

अर्थात् $\frac{x}{31}=\frac{y}{-29}=\frac{1}{-26}$

अतः प्रतिच्छेद विन्दु के अभीष्ट निर्देशांक हैं $\left(-\frac{31}{26}, \frac{29}{26}\right)$.

उदाहरण 2. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो रेखा $4x+3y-8=0$ तथा $x+y-1=0$ के प्रतिच्छेद विन्दु से गुजरती है तथा रेखा $7x-3y+8=0$ पर लम्ब है।

क्रिया : दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेद विन्दु के लिए वज्रगुणन द्वारा

$$\frac{x}{-3+8}=\frac{y}{-8+4}=\frac{1}{4-3}$$

अर्थात् प्रतिच्छेद विन्दु के निर्देशांक $(5,-4)$, है। अब रेखा $7x-3y+8=0$ के लम्ब किसी रेखा का समीकरण $3x+7y=k$ है यदि यह रेखा विन्दु $(5, -4)$ से गुजरती है तो
$k=3\times5+7\times(-4)=15-28=-13$

अतः अभीष्ट समीकरण है

$$3x+7y+13=0.$$

4·71. एक दी हुई रेखा पर किसी बिन्दु से डाले गये लम्ब के पाद निर्देशांक ज्ञात करना।

सर्व प्रथम दिये हुए विन्दु में से गुजरने वाली तथा दी हुई रेखा के लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात करिए। तब अभीष्ट निर्देशांक ज्ञात करने के लिए समीकरण तथा दी हुई रेखा के समीकरण को हल करिए।

उदाहरण : विन्दु (0,5) से रेखा $3x-4y-5=0$ पर डाले गये लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

क्रिया : दी हुई रेखा का समीकरण है

$$3x-4y-5=0$$

फिर, (1) के लम्ब तथा (0,5) में से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है
$4x+3y=k$ जहाँ $k=4\times0+3\times5=15$.

अर्थात् $4x+3y=15$

(1) और (2) को हल करने पर $x=3, y=1$

अतः लम्ब के पाद के अभीष्ट निर्देशांक (3, 1) हैं।

4·72. किसी त्रिभुज के लम्ब-केन्द्र (ortho centre) के अर्थात् इसके शीर्षलम्बों के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना।

इसके लिए हम पहले किन्हीं दो शीर्षलम्बों अर्थात् दो शीर्षों से सम्मुख भुजाओं पर डाले गए लम्बों के समीकरण ज्ञात करते हैं। तब इन समीकरणों को हल करने पर हमें अभीष्ट लम्ब केन्द्र के निर्देशाक प्राप्त होते हैं। ये निर्देशाक त्रिभुज के तीसरे शीर्षलम्ब के समीकरण को भी सन्तुष्ट करते हैं। इससे यह सिद्ध होता है कि एक त्रिभुज के तीनों शीर्षलम्ब संगामी होते हैं।

उदाहरण। रेखाओं $y=0$, $y=2x$ और $y=6x+5$ द्वारा निर्मित त्रिभुज के लम्ब केन्द्र के निर्देशाक ज्ञात करिए।

क्रिया : मान लो ABC वह त्रिभुज है जिसकी भुजाओं BC, CA और AB के समीकरण क्रमशः निम्न हैं

$y=0$....(1) $y=2x$,....(2) और $y=6x+5$ ....(3)

(2) तथा (3) को हल करने पर शीर्ष के अभीष्ट निर्देशाक $(-\frac{5}{4},-\frac{5}{2})$ हैं।

अब ऊँचाई AD जो बिन्दु A $(-\frac{5}{4},-\frac{5}{2})$ से भुजा BC अर्थात् $y=0$ पर लम्ब है, का समीकरण है $x=-\frac{5}{4}$ ....(4)

फिर ऊँचाई CF जो बिन्दु C $(-\frac{5}{6}, 0)$ से भुजा AB अर्थात् $y=2x$ पर लम्ब है, का समीकरण है $x+2y=-\frac{5}{6}$ ....(5)

अब (4) और (5) को हल करने पर

$x=-\frac{5}{4}$ तथा $y=\frac{5}{24}$

∴ लम्ब केन्द्र के अभीष्ट निर्देशांक $(-\frac{5}{4}, \frac{5}{24})$ हैं

·73. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जबकि इसकी भुजाओं के समीकरण दिये हुये हों।

त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समीकरणों को हल करके हम त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात करते हैं और तब अनुच्छेद 1·7 में दिए गए सूत्र का प्रयोग करके त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण : सिद्ध करो कि उस त्रिभुज का जिसकी भुजाओं के समीकरण है—

$y=m_1x+c_1$ ....(1) $y=m_2x+c_2$ ....(2) तथा $x=0$ ....(3)

$$\text{क्षेत्रफल}=\frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{(m_2-m_1)} \text{ है।}$$

[राज; 59, 65]

क्रिया : माना AB तथा CD दो सरल रेखाएँ परस्पर विन्दु P पर काटती हैं। P से OY पर PM लम्ब डालो संलग्न चित्र में प्रथम रेखा द्वारा y-अक्ष पर काटा गया अन्तः खण्ड $OR=c_2$ है इसी प्रकार द्वितीय रेखा द्वारा y-अ पर काटा गया अन्तः खण्ड $OQ=c_1$ है !

अतः $RQ=OQ-OR=c_1-c_2$

(1) तथा (2) को हल करने पर प्रतिच्छेद विन्दु का भुज अर्थात MP

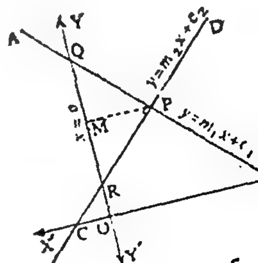
$$=\frac{c_1-c_2}{m_2-m_1}$$

अब त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल

$=\frac{1}{2}.\ RQ.\ MP$

$=\frac{1}{2}(c_1-c_2)\times\frac{c_1-c_2}{m_2-m_1}$

$\frac{(c_1-c_2)^2}{}$



चित्र 35

4·8. तीन सरल रेखाओं के संगामी (concurrent) होने का प्रतिबन्ध ज्ञात करना।

मान लो रेखाओं के समीकरण हैं :—

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$
तथा $$a_3x+b_3y+c_3=0$$

इनके संगामी होने का अभीष्ट प्रतिबन्ध ज्ञात करने के लिए हम निम्न तीन विधियों में से एक प्रयोग में लाते हैं।

प्रथम विधि—ये तीन रेखायें एक बिन्दु पर तब मिलेंगी जब इनमें से किन्ही दो का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी पर भी स्थित हो अर्थात् इस प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक तीसरी रेखा के समीकरण को सन्तुष्ट करते हों। अब प्रथम दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है—

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$$

यदि ये तृतीय समीकरण को सन्तुष्ट करते हों तो

$$a_3\times\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_3\times\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}+c_3=0$$

अर्थात् $$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0 \qquad ....(1)$$

यह अभीष्ट प्रतिबन्ध है।

द्वितीय विधि—यदि तीनों रेखाएँ एक ही बिन्दु पर मिलती हों तो इनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक तीनो रेखाओं के युगपत् समीकरणों को सन्तुष्ट करेंगे। अतः यदि इस बिन्दु के निर्देशांक (x',y') हों तो

$$a_1x'+b_1y'+c_1=0$$
$$a_2x'+b_2y'+c_2=0$$
$$a_3x'+b_3y'+c_3=0$$

समीकरणों में से (x', y') को लुप्त करने पर हम अभीष्ट प्रतिवन्ध
रते हैं :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad ....(2)$$

जो विस्तार करने पर प्रतिवन्ध (1) के ही तुल्य है।

तीनों रेखाओं के संगामी होने की स्थिति को निश्चित करने के लिये निम्नविधि भी उपयुक्त है।

तृतीय विधि—($l-m-n$ जांच) यदि तीन ऐसी राशियाँ l, m, n ज्ञात की जा सकें जिससे कि x तथा y के सब मानों के लिए

$$l(a_1x+b_1y+c_1)+m(a_2x+b_2y+c_2)+n(a_3x+b_3y+c_3)=0$$

तो तीनों रेखायें एक ही विन्दु पर मिलेंगी।

क्योंकि उस स्थिति में

$$a_3x+b_3y+c_3=-\frac{l}{n}(a_1x+b_1y+c_1)-\frac{m}{n}(a_2x+b_2y+c_2) \qquad ....(3)$$

अब यदि प्रथम दो रेखाओं के प्रतिच्छेद विन्दु के निर्देशांक (x', y') हों तो $a_1x'+b_1y'+c_1=0$ तथा $a_2x'+b_2y'+c_2=0$

अतः x, y के स्थान पर x', y' प्रतिस्थापित करने पर (3) का दक्षिण पक्ष शून्य हो जाता है और इसके परिणाम स्वरूप वामपक्ष भी शून्य हो जाता है अर्थात् $a_3x'+b_3y'+c_3=0$ जिससे स्पष्टतया सिद्ध होता हैं कि विन्दु (x', y') तृतीय रेखा पर भी स्थित है।

अतः तीनों रेखाएँ संगामी हैं जब प्रतिवन्ध (3) सन्तुष्ठ होता है।

टिप्पणी : यह विधि तब प्रयुक्त की जाती है जब राशियां l, m, n x, y के गुणांकों को देखने से अनुमान लगाया जा सके।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि निम्न रेखाएँ संगामी हैं—

$$3x-4y+6=0;\ x+2y-8=0;\ 4x+y=11$$

क्रिया : यहां प्रथम दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक $(2, 3)$ है। ये निर्देशांक तीसरी रेखा के समीकरण को भी संतुष्ठ करते हैं जैसा कि सरलता से देखा जा सकता है। अतः तीनों रेखाएँ संगामी हैं।

उदाहरण 2. उपरोक्त तृतीय विधि के द्वारा सिद्ध करो कि रेखाएँ $2x-3y+5=0$; $x+4y-2=0$ तथा $8x-y+11=0$ संगामी हैं।

क्रिया : इन तीनों रेखाओं के दिये हुये समीकरणों के वामपक्षों को क्रमानुसार 3, 2 तथा -1 से गुणा करके जोड़ने पर

$$3\,(2x-3y+5)+2(x+4y-2)-(8x-y+11)$$
$$=x(6+2-8)+y(-9+8+1)+(15-4-11)$$
$=x\times 0+y\times 0+0$ जो x तथा y के सभी मानों के लिए शून्य है।

अतः दी हुई रेखाएँ संगामी हैं।

उदाहरण 3. a का वह मान ज्ञात करो जिसके लिए सरल रेखाएँ $3x-4y+5=0$; $7x-8y+5=0$ और $4x+5y+a=0$ संगामी हैं।

क्रिया : यहां प्रथम दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक $(5,5)$ हैं। यदि तीनों रेखाएँ संगामी हो तो ये निर्देशांक तृतीय समीकरण को संतुष्ठ करेंगे जिससे $4\times 5+5\times 5+a=0$

अतः a का अभीष्ट मान $=-45$ उत्तर

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि एक त्रिभुज के कोणों के आन्तरिक अर्धक संगामी होते हैं।

क्रिया : मान लो मूलबिन्दु त्रिभुज के अन्दर स्थित है तथा इसकी तीन भुजाओं के समीकरण हैं—

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad (i)$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad (ii)$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0 \quad (iii)$$

जहाँ c_1, c_2 तथा c_3 सब धन राशियाँ हैं।

क यहाँ मूलविन्दु त्रिभुज के प्रत्येक कोण के अन्दर स्थित है, त्रिभुज
कोण का आंतरिक अर्धक वह रेखा होगी जो मूलबिन्दु को रखने वाले
अर्धक है।

अतः कोणों के आंतरिक अर्धकों के समीकरण हैं :—

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=0 \quad \text{....}(iv)$$

$$\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}-\frac{a_3x+b_3y+c_3}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}}=0 \quad \text{....}(v)$$

$$\frac{a_3x+b_3y+c_3}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}}-\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=0 \quad \text{....}(vi)$$

इसमें से प्रत्येक को इकाई से गुणा करके जोड़ने पर हम देखते हैं कि प्राप्त परिणाम x तथा y के सब मानों के लिए शून्य के बराबर है।

अतः एक त्रिभुज के कोणों के आन्तरिक अर्धक सर्वदा संगामी होते हैं।

टिप्पणी: हम ज्यामिति द्वारा जानते हैं कि कोणों के आन्तरिक अर्धक का प्रतिच्छेद विन्दु ही त्रिभुज का अन्तः केन्द्र (incentre) होता है। इस प्रकार हम उसके निर्देशांक भी ज्ञात कर सकते हैं।

4·9. दो रेखाओं के प्रतिच्छेद विन्दु में से गुजरने वाली किसी सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना।

मान लो परस्पर-प्रतिच्छेदी (intersecting) रेखाओं के समीकरण हैं—

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{....}($$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \text{....}($$

इनके प्रतिच्छेद-विन्दु से गुजरने वाली रेखाएँ संख्या में अनन्त हों हमको इन सब सरल रेखाओं का व्यापक (general) समीकरण ज्ञात है। इसके लिए दो विधियां हैं—

प्रथम विधि—हम दिये हुये समीकरणो को x तथा y के लिए हल करके इन दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं। मान लो इस प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक (x', y') हैं। तब इस बिन्दु से गुजरने वाली किसी रेखा का समीकरण होगा—

$y-y'=m(x-x')$ जहां m कोई अचर राशि है जिसके अनन्त मान हो सकते हैं। m का निश्चित मान एक और प्रतिबन्ध की सहायता से ज्ञात करने पर ही अभीष्ट रेखा की स्थिति व समीकरण निश्चित की जा सकती है।

द्वितीय विधि—यदि दी हुई रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु (x', y') हो तो

$$a_1x'+b_1y'+c_1=0 \qquad ....(1)$$

और
$$a_2x'+b_2y'+c_2=0 \qquad ....(2)$$

अब हम समीकरण

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0 \qquad ....(3)$$

पर विचार करते हैं, जहाँ k एक स्वेच्छ अचर राशि (arbitrary constant) है।

समीकरण (3) एकघाती होने के कारण एक सरल रेखा को निरूपित करता है। फिर दी हुई रेखाओ के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांको (x', y') को (3) के वामपक्ष मे प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है :

$$a_1x'+b_1y'+c_1+k(a_2x'+b_2y'+c_2)$$

जो (1) तथा (2) मे दिए गए सम्बन्धो के कारण शून्य के बराबर है।

अतः (x',y') समीकरण (3) को सन्तुष्ट करते हैं। इसलिये समीकरण (3) प्रतिच्छेद बिन्दु (x', y') से गुजरने वाली किसी भी रेखा को निरूपित करता हैं, चाहे k का कुछ भी मान हो।

अतः k के सब मानो के लिये रेखाओ $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली किसी रेखा का समीकरण है।

$a_1x+b_1y+c_1+k\ (a_2x+b_2y+c_2)=0$ जहाँ k कोई स्वेच्छ अचर राशि है

...ः यदि हम दी हुई रेखाओं के समीकरणों को $L=0$ तथा $L'=0$ ...म में लिखें तो इनके प्रतिच्छेद विन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ...$kL'=0$ होगा जहां स्वेच्छ अचर राशि k के अनन्त मान हो सकते हैं किसी और प्रतिबंध द्वारा निश्चित किये जाते हैं और तभी प्रतिच्छेद विन्दु ...जाने वाली रेखा की स्थिति नियत होती है।

इस अनुच्छेद में निर्दिष्ट विधि को भली-भाँति समझ कर स्मरण रखना चाहिये।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. विन्दु $(3, -4)$ और सरल रेखाओं $4x-5y-3=0$ और $2x-5y+1=0$ के प्रतिच्छेद विन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

क्रिया : यहाँ दी हुई रेखाओं के समीकरणों को तिर्यक् गुणन द्वारा हल करने पर प्राप्त होता है—

$$\frac{x}{-5-15}=\frac{y}{-6-4}=\frac{1}{-20+10}$$

इस प्रकार दी हुई सरल रेखाओं का प्रतिच्छेद विन्दु $(2, 1)$ है। अब विन्दु $(3, -4)$ और विन्दु $(2, 1)$ से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण है—

$$y+4=\frac{1+4}{2-3}(x-3)$$

$$=-5(x-3)$$

अतः अभीष्ट समीकरण है $\quad 5x+y-11=0$

उदाहरण 2. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो $3x-4y+1=0\cdots(1)$ तथा $5x+y-1=0\ldots(2)$ के प्रतिच्छे... से गुजरे और (क) अक्षों से बराबर के अन्तःखण्ड काटे।

(ख) रेखा $2x-3y=10$ पर लम्ब हो।

क्रिया : दी हुई सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली किसी सरल रेखा का समीकरण है

$$5x+y-1+k(3x-4y+1)=0$$

अर्थात् $$(5+3k)x+(1-4k)y-1+k=0 \quad \ldots(3)$$

(क) अब समीकरण (3) से निरूपित रेखा द्वारा अक्षों से कटे हुए अन्तः खण्डों को ज्ञात करने के लिए हम इस समीकरण को रख सकते है—

$$\frac{x}{\frac{1-k}{5+3k}}+\frac{y}{\frac{1-k}{1-4k}}=1$$

इस प्रकार अन्तः खण्डों को समान रखने पर

$$\frac{1-k}{5+3k}=\frac{1-k}{1-4k}$$

जिससे $1-4k=5+3k$ अथवा $1-k=0$

$\therefore \quad k=-\frac{4}{7}$ अथवा 1.

अब k के द्वितीय मान 1 के लिए अन्तः खण्डों की लम्बाई शून्य प्राप्त होती है। अतः इस मान के लिए अभीष्ट रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है और उसका समीकरण $8x-3y=0$ है।

अब $k=-\frac{4}{7}$ तो रेखा का अभीष्ट समीकरण होगा

$$(5-\tfrac{12}{7})x+(1+\tfrac{16}{7})y-\tfrac{4}{7}-1=0$$

अर्थात् $$23x+23y-11=0.$$

(ख) जैसा कि समीकरण (3) से स्पष्ट है इससे निरूपित रेखा की प्रवणता

$$=-\frac{5+3k}{1-4k} \text{ है।}$$

अतः यदि रेखा (3) दी हुई रेखा (ख) पर लम्ब हो तो

$$\frac{5+3k}{4k-1}\times\frac{2}{3}=-1$$

$$10+6k=3-12k$$

अथवा $\quad 18k=-7$ जिससे $k=-\frac{7}{18}$

अर्थात

∴ अभीष्ट समीकरण होगा

$$\left(5-\tfrac{7}{9}\right)x+\left(1+\tfrac{14}{9}\right)y-1-\tfrac{7}{18}=0$$

अर्थात $\quad 69x+46y-25=0$

प्रश्नावली 4 (c)

(विविध प्रश्न)

निम्न रेखा युग्मों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करो (प्र. 1 से 3)

1. $3x-4y-7=0$ और $2x-7y+4=0$ ✓
2. $x+3y-5=0$ और $x-2y+5=0$ ✓
3. $x+y=a+b$ और $bx+ay=2ab$
4. बिन्दु (1, 2) और (4, 3) को मिलाने वाली रेखा और बिन्दु (2, 3) तथा (4, 1) को मिलाने वाली रेखा किस बिन्दु पर परस्पर मिलती हैं। [राज; 61

सिद्ध करो कि तीन-तीन रेखाओं के निम्न समुदाय संगामी हैं तथा उ प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात करो। (प्रश्न 5 व 6)

5. (a) $2x-y-5=0$; $x-2y+2=0$; $3x+y-15=0$.✓
   (b) $4x+3y-8=0$; $x+y-1=0$; $4x+5y=0$.✓
6. $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$; $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $y=x$
7. सिद्ध करो कि निम्न तीन रेखाएँ संगामी है तथा तृतीय रेखा रेखाओं के बीच के कोण का अर्धक है।

$$15x-18y+1=0;\ 12x+10y-3=0$$

$$6x+66y-11=0$$

m का वह मान ज्ञात करो जिससे निम्न रेखा समूह संगामी हो जाएं।
(प्रश्न 8 व 9)

8. (a) $y=3x-1$; $2y=x+3$ और $3y=mx+4$.
   (b) $y-x=1$; $y-2x=2$ और $y-mx=3$.

9. (a) $5x+my-3=0$; $3x-y-2=0$ और $2x+y-3=0$
   (b) $3x+y-2=0$; $mx+2y-3=0$ और $2x-y-3=0$
   [राज बोर्ड; 60 (S)]

10. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी भुजाओं के समीकरण है :
    (i) $y=2$; $x=2y$; $y=2x-3$.
    (ii) $y=x$; $y=2x$; $y=3x+4$.
    (iii) $x+3y-11=0$; $3y-x+5=0$ और $4y+3x=13$.
    (iv) $y+x=0$; $3y-x+2=0$; $3y=5x+2$.

11. सिद्ध करो कि (a) एक त्रिभुज की भुजाओं के लम्बअर्धक संगामी होते हैं।
    (b) एक त्रिभुज के शीर्षों से सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्ब संगामी होते हैं।

12. किसी त्रिभुज के शीर्ष $(-1, 1)$, $(3, 5)$ और $(4, 3)$ है। उसके शीर्ष लम्बों के समीकरण ज्ञात करिये और सिद्ध कीजिये कि ये संगामी हैं। [राज. बोर्ड; 67]

13. बिन्दु $(-1, 2)$ से रेखा $4x-3y+5=0$ पर डाले गये लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात करो।

14. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(4, 1)$ को रेखा $2x-3y=1$ पर बिन्दु $(3, 2)$ से खींचे गये लम्ब के पाद से मिलाए।

15. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो मूल बिन्दु से रेखाओं $3x-4y=25$ तथा $3x+5y=17$ पर डाले गए लम्बों के पादों को मिलाती है। [राज., 51]

16. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो $3x-5y+11=0$ पर लम्ब हो तथा $5x-6y=1$ और $3x+2y+5=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरती हो।

) y-अक्ष तथा रेखाओं $3x+4y=10$ और $3y-4x=15$ द्वारा निर्मित त्रिभुज के अन्तःकेन्द्र के निर्देशांक ज्ञात करो।

(b) उस त्रिभुज का अन्तःकेन्द्र ज्ञात कीजिये जिसकी भुजाओं के समीकरण $3x+4y=0$; $12y-5x=0$ तथा $y=15$ हैं।

उस त्रिभुज के लम्ब केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात करो जिसके शीर्ष $(2, 3)$, $(0, 1)$, $(4, 0)$ हैं।

9. उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी भुजाएँ $3x+4y=a$; $3x+4y=b$; $4x-3y=c$ और $4x-3y=d$ हैं।

20. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो रेखाओं $3x-4y+8=0$ तथा $5x-4y+12=0$ के प्रतिच्छेद विन्दु को मूल बिन्दु से मिलाए।

21. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो विन्दु $(2, -9)$ तथा सरल रेखाओं $2x+5y-8=0$ तथा $3x-4y=35$ के प्रतिच्छेद विन्दु से होकर जाती है। [राज.; 60]

22. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो रेखाओं $x+2y-5=0$ और $4x-y+2=0$ के प्रतिच्छेद विन्दु से होकर जाती है तथा रेखा $4x-3y=11$ के (a) समान्तर है (b) लम्ब है।

23. अक्षों से वरावर अन्तःखण्ड काटने वाली उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो रेखाओं $2x+5y-1=0$ और $x-3y+5=0$ के प्रतिच्छेद विन्दु से गुजरती है।

24. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो $2x-3y=10$ और $x+2y=$ के प्रतिच्छेद विन्दु को रेखाओं $16x-10y=33$ और $12x+1$ $+29=0$ के प्रतिच्छेद विन्दु से मिलाए।

25. यदि तीन रेखाएँ $p_1x+q_1y=1$, $p_2x+q_2y=1$ और p_3x+q संगामी हों तो सिद्ध करो कि वे तीन विन्दु जिनके निर्देशांक $(p$ (p_2, q_2) तथा (p_3, q_3) हैं, एक रेखा पर स्थित होंगे।

प्रश्नावली 4 (d)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. सरल रेखाओं $y-x+1=0$ तथा $\sqrt{3}x-y+2=0$ के मध्य निम्न कोण है :
   (A) $15°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$ ( )

2. सरल रेखाओं $y=m_1x+c_1$ तथा $y=m_2x+c_2$ के परस्पर लम्ब होने के लिए प्रतिबन्ध है—
   (A) $m_1=\frac{1}{m_2}$ (B) $m_1=-m_2$
   (C) $m_1=-\frac{1}{m_2}$ (D) $m_1+m_2=-1$ ( )

3. सरल रेखाओं $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ के बीच का कोण है—
   (A) $\tan^{-1}\frac{a_1a_2-b_1b_2}{a_1b_2+a_2b_1}$, (B) $\tan^{-1}\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}$
   (C) $\tan^{-1}\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1a_2-b_1b_2}$, (D) $\tan^{-1}\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ ( )

4. रेखाएँ $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ समान्तर होंगी यदि—
   (A) $\frac{a_1}{b_2}=\frac{a_2}{b_1}$ (B) $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=0$
   (C) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ (D) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{b_1}{b_2}=0$ ( )

5. सरल रेखा $x+2y+5=0$ के समान्तर और बिन्दु $(3,-1)$ में से जाने वाली रेखा का समीकरण है :
   (A) $x+2y+1=0$ (B) $2y=x+1$
   (C) $2y=x-1$ (D) $2y=1-x$ ( )

6. सरल रेखा $y=mx+5$ सरल रेखा $3x+5y=8$ पर लम्ब होगी यदि m का मान है—
   (A) $\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $-\frac{5}{3}$ (D) $\frac{3}{5}$ ( )

[खण्ड (अ) निर्देशांक ज्यामि...

...रल रेखा $3x - 4y + 7 = 0$ पर लम्ब और विन्दु $(1, -2)$ में से होकर जाने वाली सरल रेखा का समीकरण होगा— ( )

(A) $4x + 3y - 2 = 0$ (B) $4x + 3y + 2 = 0$

(C) $4x - 3y + 2 = 0$ (D) $4x - 3y - 2 = 0$

... यदि O मूल विंदु है और P $(-2, 1)$ और Q $(1, 3)$ दो अन्य विंदु हैं तो निम्न विंदु समूह रेखा $3x - 2y + 7 = 0$ के एक ही ओर स्थित हैं— ( )

(A) P, Q तथा O (B) P तथा O

(C) Q तथा O (D) P तथा Q

9. सरल रेखा $24x + 7y + 50 = 0$ पर मूल विन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई होगी— ( )

(A) 50 (B) 2 (C) $\frac{25}{24}$ (D) $\frac{50}{31}$

10. सरल रेखाओं $4x - 3y + 8 = 0$ और $3y - 4x - 6 = 0$ के बीच की दूरी है— ( )

(A) 14 (B) 2 (C) $\frac{14}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

11. सरल रेखाओं $4x - y - 1 = 0$ तथा $2x + y - 5 = 0$ के प्रतिच्छेद विन्दु के निर्देशांक हैं— (

(A) $(1, 3)$ (B) $(2, 3)$

(C) $(3, 2)$ (D) $(3, 1)$

12. m का वह मान जिससे रेखाएँ $mx + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 3 =$ ... तथा $3x + y - 2 = 0$ संगामी हैं, निम्न होगा – (

(A) 3 (B) 5 (C) 2 (D) 6

13. सरल रेखाओं $4x - y - 7 = 0$ और $5x + y - 11 = 0$ के प्र... विन्दु को मूल विन्दु से मिलाने वाली रेखा की प्रवणता होगी—

(A) -2 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

14. सरल रेखाओं $3x-4y+10=0$ और $12x-9y-10=0$ के बीच के कोणों के समद्विभाजकों के समीकरण हैं—
    (A) $3x-4y+10=\pm(12x-9y-10)$
    (B) $3x-4y+10=\pm 3(12x-9y-10)$
    (C) $(3x-4y+10)=\pm 5(12x-9y-10)$
    (D) $3(3x-4y+10)=\pm(12x-9y-10)$ ( )

15. सरल रेखाओं $x=0$ तथा $y=0$ के बीच के कोणों के समद्विभाजकों के समीकरण हैं—
    (A) $y^2+x^2=0$ (B) $y^2-x^2=0$
    (C) $y=x$ (D) $y=-x$ ( )

विविध प्रश्नावली 4 (e)

(राजस्थान बोर्ड की परीक्षा के प्रश्न)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. रेखा $y=mx+8$ रेखा $2x+3y=5$ पर लम्ब होगी यदि m बराबर हो— [1967]
   (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{2}{3}$ ( )
2. (0, 0) से रेखा $5x+12y+26=0$ पर खींचे गए लम्ब की लम्बाई होगी— [1967]
   (A) 26 (B) 2 (C) $\frac{13}{5}$ (D) $\frac{26}{5}$ ( )
3. (1, 1) में होकर जाने वाली रेखा $2x+y=6$ पर लम्ब सरल रेखा का समीकरण है— [1968]
   (A) $2x+y=3$ (B) $2x-y=1$
   (C) $2y-x=1$ (D) $2y+x=3$ ( )
4. बिन्दु $(-2, 3)$ तथा $(4, -9)$ को मिलाने वाली सरल रेखा पर लम्ब सरल रेखा का झुकाव (slope) है— [1968]
   (A) -2 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$ ( )
5. रेखाओं $y-x+1=0$ तथा $\sqrt{3}x-y+2=0$ के मध्य कोण है— [1968]
   (A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° ( )
6. बिन्दु (3, 4) की रेखा $4y+3x+10=0$ से दूरी है— (1968)
   (A) $\frac{34}{25}$ (B) $\frac{34}{5}$ (C) 7 (D) $\frac{7}{5}$ ( )

[खण्ड (अ) निर्देशा...

...नों रेखाओं $3y+x-10=0$ और $2x-5y+13=0$ पर स्थित ...बिन्दु है— [1968]

(A) (10,0) (B) (6,5) (C) (4,2) (D) (1,3) ( )

a का ऐसा मान ज्ञात करो जिससे रेखाएँ $3x+y-2=0$, $ax+2y-3=0$ तथा $2x-y-3=0$ एक बिन्दु पर मिलें [1968] (..........)

... एक सरल रेखा बिन्दु (2,3) में होकर जाती है तथा $4x-7y+5=0$ पर लम्बवत् है तो उसका समीकरण है— [1969]

(A) $4x-7y+13=0$ (B) $4x+7y-29=0$ ( )

(C) $x-4y-2=0$ (D) $7x+4y-26=0$

10. सरल रेखाओं $5x-6y=1$ तथा $3x+2y+5=0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करो। [1970] (..........)

11. सरल रेखाओं $y-x+5=0$ और $\sqrt{3}x-y+7=0$ के बीच कोण है— [1971]

(A) 150° (B) 60° (C) 15° (D) 105° ( )

(सैद्धान्तिक)

12. एक त्रिभुज के शीर्ष (—1, 1), (8, 5) और (4, 3) हैं। उनके शीर्ष लम्बों के समीकरण ज्ञात करो और प्रमाणित करो कि वे संगामी हैं। [1967]

13. बिन्दु (x_1, y_1) से (2, 1) तथा (—2, 4) को मिलाने वाली रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात करो। [1968...]

14. बिन्दु (2, 3) से रेखा $y=x+4$ पर डाले गये लम्ब के पाद के निर्देशां... ज्ञात करो। [197...]

15. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $3x-5y+11=0$ ... समान्तर है तथा $5x-6y=1$ और $3x+2y+5=0$ के प्रति... बिन्दु से होकर जाती है। [19...]

16. रेखाओं $4x+3y=7$ तथा $2y=5$ के मध्य कोणों के समद्विभाज... समीकरण ज्ञात कीजिए तथा समद्विभाजकों के बीच का कोण ... कीजिए। [1...

5

दो या अधिक सरल रेखाओं के समीकरण

(Equations representing two or more straight lines)

5·0. दो या अधिक सरल रेखाओं को निरूपित करने वाला समीकरण

एक समीकरण दो या अधिक सरल रेखाओं को निरूपित कर सकता है। विलोमत : दो या अधिक सरल रेखाओं को बिन्दु पथ (Locus) मान कर हम उन्हें केवल एक समीकरण से निरूपित कर सकते हैं।

उदाहरणत : $(ax+by+c)\ (a'x+b'y+c')=0 \qquad ....(1)$

उन दो रेखाओं को निरूपित करता है जिनके पृथक् पृथक् समीकरण हैं

$$ax+by+c=0 \qquad ....(2)$$

तथा $$a'x+b'y+c'=0 \qquad ....(3)$$

क्योंकि (2) अथवा (3) पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक समीकरण (1) को सन्तुष्ट करते हैं तथा इन रेखाओं के बाहर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांकों से (1) सन्तुष्ट नहीं होता। अतः समीकरण (1) उसी बिन्दु पथ को निरूपित करता है जिसे (2) व (3) मिलकर निरूपित करते हैं इस प्रकार यदि दो (या दो से अधिक) रेखाओं के समीकरण अलग-अलग दिए हुए हों तो *इन सब रेखाओं का संयुक्त समीकरण ज्ञात करने के लिए दिए हुए इन सब* समीकरणों के वाम पक्षों को गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को शून्य के तुल्य रखते हैं। समीकरण (1) के वाम पक्ष के गुणनफल को देखने पर स्पष्ट है कि दो सरल रेखाओं को निरूपित करने वाला समीकरण द्वितीय घात का होता है अर्थात् उसके पदों की उच्चतम घात दो होती है। इसी प्रकार तीन सरल रेखाओं को निरूपित करने वाला संयुक्त समीकरण तृतीय घात का होता है। यदि $L_1=0$, $L_2=0$ तथा $L_3=0$ तीन रेखाओं के समीकरण हों तो उनका संयुक्त समीकरण होगा $L_1 \times L_2 \times L_3=0$.

विलोमतः यदि द्वितीय घात का कोई समीकरण मान लो S=0 दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है तो S एक घात के दो गुणनखण्डों में विभक्त होना चाहिए, यथा समीकरण

$6x^2+xy-12y^2-2x+31y-20=0$ अथवा $(2x+3y-4)\times(3x-4y+5)=0$, उन दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है जिनके समीकरण अलग-अलग $2x+3y-4=0$ तथा $3x-4y+5=0$ हैं किंतु समीकरण $x^2-y^2-1=0$ दो सरल रेखाएं निरूपित नहीं करता क्योंकि x^2-y^2-1 के दो एक घाती गुणनखण्ड नहीं किए जा सकते।

इससे सिद्ध होता है कि द्विघात का प्रत्येक समीकरण दो सरल रेखाओं को निरूपित नहीं करता। किन्तु जब यह द्विघाती समीकरण दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है तो इन दो रेखाओं के समीकरण दो एकघाती समीकरण के रूप में अवश्य प्राप्त हो जाते हैं–(गुणनखण्ड करके अथवा दिये हुए समीकरण को x या y के लिए हल करके)

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. निम्न रेखाओं का संयुक्त समीकरण ज्ञात करो—

$$2x-y+1=0,\ x+2y-3=0$$

क्रिया : अभीष्ट संयुक्त समीकरण है—

$$(2x-y+1)(x+2y-3)=0$$

अर्थात् $$2x^2+3xy-2y^2-5x+5y-3=0.$$

उदाहरण 2. समीकरण $xy+5y-3x-15=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के समीकरण पृथक्-पृथक् ज्ञात करो।

क्रिया : दिया हुआ समीकरण इस प्रकार रखा जा सकता है

$$(x+5)(y-3)=0.$$

∴ अभीष्ट समीकरण $x+5=0$ तथा $y-3=0$ हैं

उदाहरण 3. समीकरण $x^2-xy-2y^2+x+y=0$ द्वारा

...ों के समीकरण पृथक्-पृथक् ज्ञात करो।

क्रिया : यहाँ हमको दिये हुए समीकरण के वामपक्ष के दो एकघाती गुणनखण्ड करने हैं। इसके निम्न गुणनखण्ड सरलता से प्राप्त होते हैं—

$$(x+y)\,(x-2y+1)$$

अतः अभीष्ट समीकरण $x+y=0$ तथा $x-2y+1=0$ हैं।

5·1. समघात समीकरण (Homogeneous Equation)

परिभाषा—यदि किसी परिमेय बीजीय समीकरण के प्रत्येक पद में x और y के घातों का योग वही (समान) हो तो ऐसे समीकरण को समघात समीकरण कहते हैं। यदि घातों का योग n हो तो समीकरण को n घात का समघात समीकरण कहते हैं और इसके व्यापक रूप को इस प्रकार लिखते हैं

$$ay^n+by^{n-1}x+cy^{n-2}x^2+\ldots\ldots+kx^n=0.$$

सिद्ध करना कि n घात का समघात समीकरण मूल बिन्दु से जाने वाली n रेखाओं को निरूपित करता है।

मान लो समघात समीकरण है

$$ay^n+by^{n-1}x+cy^{n-2}x^2+\ldots\ldots+kx^n=0 \qquad \ldots(1)$$

दोनों पक्षों को x^n से विभाजित करने पर प्राप्त होता है

$$a\left(\frac{y}{x}\right)^n+b\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}+c\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2}+\ldots\ldots+k=0 \quad \ldots(2)$$

यह $\frac{y}{x}$ में n घात का समीकरण है। अतः इसके n मूल होने चाहियें जिनमें कुछ काल्पनिक भी हो सकते हैं। मान लो समीकरण के मूल $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ हैं। तब समीकरण (2) को निम्न रूप से लिखा जा सकता है।

$$a\left(\frac{y}{x}-m_1\right)\left(\frac{y}{x}-m_2\right)\left(\frac{y}{x}-m_3\right)\ldots\left(\frac{y}{x}-m_n\right)=0$$

फिर x^n से गुणा करने पर

$$a\,(y-m_1x)\,(y-m_2x)\,(y-m_3x)\ldots(y-m_nx)=0.$$

अतः यह समीकरण निम्न n सरल रेखाओं को निरूपित करता है:—

$$y-m_1x=0;\; y-m_2x=0;\; y-m_3x=0;\ldots\ldots y-m_nx=0$$

...व रेखायें मूल विन्दु से होकर जाती हैं। किन्तु ये सब वास्तविक तभी ...व सब $m_1, m_2, \ldots, m_n$ वास्तविक हों। यदि समीकरण (2) के कुछ ...ल्पनिक हों तो इनके संगत सरल रेखाएँ भी काल्पनिक होंगी और यदि ...ब समान हों तो उनके संगत रेखाएँ संपाती (coincident) होगी।

उदाहरण 4. निम्न समघाती समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओं के समी-...ण पृथक्-पृथक् ज्ञात करो।

$$2x^3-5x^2y+xy^2+2y^3=0$$

क्रिया : दी हुई समीकरण के वामपक्ष को निम्न एकघाती गुणनखण्डों में विभक्त किया जा सकता है :

$$(x-y)\ (2x+y)\ (x-2y)$$

अतः अभीष्ट समीकरण हैं

$$x-y=0;\ 2x+y=0 \text{ तथा } x-2y=0$$

5 2. द्वितीय घात के समघाती समीकरण (Homogeneous equation of second degree) का व्यापक रूप है

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \quad \ldots(1)$$

जैसा ऊपर सिद्ध किया जा चुका है यह समीकरण मूल विन्दु में से जाने वाली दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है। इन रेखाओं के पृथक्-पृथक समीकरण ज्ञात करने के लिए हम (1) को a से गुणा करने पर प्राप्त करते हैं—

$$a^2x^2+2ahxy+aby^2=0$$

अथवा

$$(ax+hy)^2-(h^2-ab)y^2=0$$

अथवा $\{ax+hy+\sqrt{(h^2-ab)}\ y\}\{ax+hy-\sqrt{(h^2-ab)}\ y\}=$...

अतः समीकरण (1) द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के अभीष्ट समीक... पृथक्-पृथक् हैं—

$$ax+hy+\sqrt{(h^2-ab)}\ y=0$$

तथा

$$ax+hy-\sqrt{(h^2-ab)}\ y=0$$

ये दो रेखाएँ $h^2 > = $ अथवा $< ab$ के अनुसार ही वास्तविक व भिन्न, सपाती अथवा काल्पनिक होती है।

यदि एक द्विघात समीकरण दो रेखाओं को निरूपित करता हो, तो इन रेखाओं के पृथक्-पृथक् समीकरण निम्न दो विधियों में से किसी एक के द्वारा ज्ञात किए जा सकते हैं।

(1) द्विघात समीकरण के सब पदों को एक ही पक्ष में लेकर तथा इस प्रकार प्राप्त व्यंजक को दो एक घात गुणनखण्डों में विभक्त करके प्रत्येक को शून्य के बराबर रख दो। यह नियम व्यापक है और सब घातों के समीकरण के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है।

(2) यदि विधि (1) से प्राप्त व्यंजक के गुणनखण्ड सरलता से नहीं किए जा सकें तो इस समीकरण को x अथवा y में से एक में द्विघाती मान कर इसे x अथवा y के लिए हल करो। इस प्रकार प्राप्त मूलों के सगत हमें दो सरल रेखाओं के समीकरण प्राप्त हो जावेंगे।

उदाहरण : सिद्ध करो कि समीकरण $3x^2-8xy-3y^2=0$ और $x+2y=3$ एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की भुजाओं को निरूपित करते हैं।

क्रिया : समीकरण $3x^2-8xy-3y^2=0$ ...(1)

को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$3x^2-9xy+xy-3y^2=0$$

अथवा $(3x+y)(x-3y)=0$

∴ प्रथम समीकरण मूल बिन्दु में से जाने वाली निम्न दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है

$$3x+y=0 \quad ...(2)$$

$$x-3y=0 \quad ...(3)$$

अब (2) से $m_1=-3$ तथा (3) से $m_2=\frac{1}{3}$

इस प्रकार ये रेखायें स्पष्टतया परस्पर लम्ब हैं।

फिर दी हुई द्वितीय समीकरण है

$x+2y=3$ जिससे $m_3=-\frac{1}{2}$

(3) और (4) के बीच कोण होगा

$$\tan^{-1}\frac{m_2-m_3}{1+m_2m_3}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\tan^{-1}(1)=45^\circ$$

इस प्रकार दिया हुआ प्रथम समीकरण दो परस्पर लम्बवत् रेखाओं को निरूपित करता है और इनमें से एक रेखा दी हुई द्वितीय समीकरण द्वारा निरूपित रेखा से 45° का कोण बनाती है। अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 5 (a)

निम्न समीकरणों से निरूपित रेखाओं का संयुक्त समीकरण ज्ञात करो—

1. $x-3y=0$ और $x+4y=0.$
2. $x-y=0$ और $x+y=0.$
3. $5x+6y-3=0$ और $3x+4y+7=0.$

निम्न समीकरणों द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के समीकरण अलग-अलग बताओ:—

4. $xy=0.$
5. $x^2-5x+6=0.$
6. $2x^2+5xy+2y^2=0.$
7. $y^3-xy^2-14x^2y+24x^3=0.$
8. सिद्ध करो कि समीकरण $x^4-x^3y-xy^3+y^4=0.$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं में से दो संपाती (coincident) दो काल्पनिक (imaginary) हैं।

उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी भुजाओं के निम्न समीकर

9. $y^2-9xy+18x^2=0$ और $y=9$
10. $4x^2-y^2=0$ और $y=a$

$6x^2-5xy+y^2=0$ और $x+y=3a$

12. सिद्ध करो कि रेखाओं $x^2-4xy+y^2=0$ और $x+y=1$ द्वारा एक समबाहु त्रिभुज बनेगा। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात करो।
13. सिद्ध करो कि समीकरण $x^2-7x+6=0$ और $y^2-14y+40=0$ एक आयत की भुजाओं को निरूपित करते हैं। इसके विकर्णों (diagonals) के समीकरण ज्ञात करो।

5·3 समीकरण $\quad ax^2+2hxy+by^2=0 \quad$ ....(1)
द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करना। [राज; 67, 68]

मान लो इस समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओं के पृथक् पृथक् समीकरण हैं

$$y-m_1x=0 \text{ तथा } y-m_2x=0 \quad ....(2)$$

इनके वाम पक्षों को परस्पर गुणा करने पर दोनों रेखाओं का संयुक्त समीकरण प्राप्त होगा

$$(y-m_1x)(y-m_2x)=0 \quad ...(3)$$

अब (3) समीकरण उन्ही रेखाओं को निरूपित करता है जिनको समीकरण (1) निरूपित करता है।

अत. $ax^2+2hxy+by^2 \equiv b\,(y-m_1x)\,(y-m_2x)$

यहाँ हमने (1) और (3) की सर्वसमता के लिए दक्षिण पक्ष को b से गुणा करके y^2 के गुणांकों को समान बना लिया है।

अथवा $ax^2+2hxy+by^2 \equiv by^2-b(m_1+m_2)xy+bm_1m_2x^2$ ... (4)

अब दोनों पक्षों मे xy तथा x^2 के गुणांकों को बराबर रखने पर

$$-b(m_1+m_2)=2h \text{ तथा } bm_1m_2=a$$

जिससे $\quad m_1+m_2=-\frac{2h}{b}$

तथा $\quad m_1m_2=\frac{a}{b}$ $\quad \Bigg\}$ ... (5)

यदि समीकरण (3) से निरूपित रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{1+m_1m_2} \quad ...(6)$$

अब समी. (5) से (m_1+m_2) तथा m_1m_2 का मान समी. (6) में रखने पर

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - 4\frac{a}{b}}}{1+\frac{a}{b}}$$

∴ अभीष्ट कोण $\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right)}$

टिप्पणी : m_1 तथा m_2 के पृथक्-पृथक् मान करणीगत होने के कारण कुछ असुविधाजनक हैं। किन्तु समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ के अध्ययन में m_1+m_2 तथा m_1m_2 के उपरोक्त मानों को स्मरण रखना बड़ा सरल है और यह उपयोगी सिद्ध होता है।

उपसाध्य 1. लम्बता के लिए प्रतिबन्ध (Condition for perpendicularity). [राज., 67]

यदि $\theta=90°$ तो $\tan\theta=\infty$ जिसके लिए $a+b=0$

अर्थात् इस अवस्था में सरल रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी। अतः यदि समीकरण (1) $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाएँ परस्पर लम्ब हों तो $a+b=0$ होगा।

अर्थात् इस समघात समीकरण में x^2 और y^2 के गुणांकों का योग शून्य होगा।

उपसाध्य 2. संपात के लिए प्रतिबन्ध (Condition for coincidence) [राज; 67]

यदि $\theta=0$ तो $\tan\theta=0$, जिससे $h^2-ab=0$

अर्थात् इस अवस्था में रेखायें संपाती (Coincident) होंगी। अतः यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाएँ संपाती हों तो $h^2=ab$ होगा।

इस अवस्था में समीकरण का वामपक्ष एक पूर्ण वर्ग होगा क्योंकि इस स्थिति में समीकरण बन जाता है—

∴ $ax^2+2\sqrt{ab}xy+by^2=0$ अर्थात् $(\sqrt{a}x+\sqrt{b}y)^2=0$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. निम्न समीकरणों द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के पृथक् पृथक् समीकरण ज्ञात करो तथा उनके बीच के कोण बताओ—

(a) $4x^2-24xy+11y^2=0$,

(b) $x^2-2xy\tan\theta-y^2=0$.

क्रिया : (a) यहाँ समीकरण को इस रूप में रखा जा सकता है

$$4x^2-22xy-2xy+11y^2=0$$

अथवा $$2x(2x-11y)-y(2x-11y)=0$$

अथवा $$(2x-11y)(2x-y)=0$$

∴ समीकरण (1) से निरूपित रेखाओं के पृथक् पृथक् समीकरण हैं : $2x-11y=0$ और $2x-y=0$

यदि इनकी प्रवणता m_1 तथा m_2 हों तो $m_1=\frac{2}{11}$ तथा $m_2=2$.

$$\therefore \text{अभीष्ट कोण}=\tan^{-1}\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\tan^{-1}\left(\frac{2-\frac{2}{11}}{1+\frac{4}{11}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{20}{15}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

इस कोण का मान हम सीधा अनुच्छेद 5·2 में निर्दिष्ट सूत्र द्वारा भी ज्ञात कर सकते हैं जैसा अगले उदाहरण में प्रदर्शित है।

(b) यहाँ दिया हुआ समीकरण रखा जा सकता है—

$$\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}\tan\theta-1=0,$$

जिससे $$\frac{y}{x}=\frac{-2\tan\theta\pm\sqrt{4\tan^2\theta+4}}{2}$$

$$=\frac{-2\tan\theta\pm2\sec\theta}{2}=-\tan\theta$$

अतः रेखाओं के पृथक्-पृथक् समीकरण हैं—

$y=(\sec\theta-\tan\theta)x$ और $y+(\tan\theta+\sec\theta)x=0$

फिर रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करने के लिए यहाँ

$$a=1,\ b=-1 \text{ तथा } h=-\tan\theta$$

$$\therefore a+b=0$$

इस प्रकार x^2 तथा y^2 के गुणांकों का योग शून्य है। अतः दी हुई समीकरण द्वारा निरूपित रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं।

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि समीकरण $bx^2-2hxy+ay^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाएँ समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के, मूल बिन्दु पर, लम्ब हैं। [राज., 1959]

क्रिया : मान लो समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ से निरूपित रेखाओं के अलग-अलग समीकरण हैं—

$$y-m_1x=0 \qquad \text{....(1)}$$

तथा
$$y-m_2x=0 \qquad \text{....(2)}$$

जिससे
$$m_1+m_2=-\frac{2h}{b} \text{ और } m_1m_2=\frac{a}{b} \qquad \text{....(3)}$$

अब रेखाओं (1) तथा (2) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्बों के समीकरण हैं—

$m_1y+x=0$ ... (4) तथा $m_2y+x=0$ ....(5)

$\therefore$ इन लम्बों का संयुक्त समीकरण है $(m_1y+x)(m_2y+x)=0$

अर्थात् $m_1m_2y^2+(m_1+m_2)xy+x^2=0$ ....(6)

इनमें समीकरण (3) से (m_1+m_2) तथा m_1m_2 के मानों को प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{a}{b}y^2-\frac{2h}{b}xy+x^2=0$$

अर्थात् $$ay^2-2hxy+bx^2=0$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि रेखाएँ $x^2+4xy+y^2=0$ रेखा $x-y=4$ के साथ एक समबाहु त्रिभुज बनाती हैं। [राज; 65]

क्रिया : यहाँ दिये हुए समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओ के पृथक् २ समीकरण हैं

$$y=(-2+\sqrt{3})x \quad ....(1)$$

तथा $$y=(-2-\sqrt{3})x \quad ....(2)$$

इनकी प्रवणतायें $-2+\sqrt{3}$ तथा $-2-\sqrt{3}$ हैं

तथा तीसरी रेखा $x-y=4 \quad ....(3)$

रेखा (3) की प्रवणता $=1$

अब रेखा (1) तथा (3) के बीच का कोण $=\tan^{-1}\left|\dfrac{1-(-2+\sqrt{3})}{1+(-2+\sqrt{3})}\right|$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)=\tan^{-1}\sqrt{3}=60^\circ$$

फिर समीकरण $x^2+4xy+y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण

$$\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right)$$

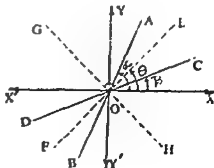
$$=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{4-1}}{2}\right)=\tan^{-1}\sqrt{3}=60^\circ$$

इस प्रकार दो गई रेखाओं से बने त्रिभुज के दो कोण 60° के हैं। अतः तीसरा कोण भी 60° का होगा। अतः त्रिभुज समबाहु है।

5·4. समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के अर्धकों का समीकरण ज्ञात करना। [राज; 1953]

मानलो समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाएं AB तथा CD हैं और मान लो AB तथा CD, x-अक्ष से क्रमशः α तथा β कोण बनाती हैं।

$$\therefore\ ax^2+2hxy+by^2 \equiv b(y-x\tan\alpha)(y-x\tan\beta)$$



चित्र 36

जिससे $\quad \alpha + \tan\beta = -\frac{2h}{b}$

और $\quad \tan\alpha \tan\beta = \frac{a}{b}$

मान लो कोणों के अर्धक EF तथा GH हैं तथा ये क्रमशः x-अक्ष से कोण θ तथा $90^\circ + \theta$ बनाते हैं।

अब $\quad \theta = \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$

अथवा $\quad 2\theta = \alpha + \beta$

अब कोणों के अर्धकों का संयुक्त समीकरण है

$$(y - x\tan\theta)\{y - x\tan(90^\circ + \theta)\} = 0$$

अथवा $\quad (y - x\tan\theta)(y + x\cot\theta) = 0$

अर्थात् $\quad y^2 - xy(\tan\theta - \cot\theta) - x^2 = 0$

अब $\quad \tan\theta - \cot\theta = \frac{\tan^2\theta - 1}{\tan\theta} = \frac{-2}{\tan 2\theta}$

किन्तु $\quad \tan 2\theta = \tan(\alpha + \beta)$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{-2h}{b}}{1 - \frac{a}{b}}$$

$$= \frac{2h}{a - b}$$

$\therefore$ xy का गुणांक $= \frac{2}{\tan 2\theta} = \frac{a - b}{h}$

अतः अर्धकों का अभीष्ट समीकरण है—

$$y^2 + xy\frac{(a-b)}{h} - x^2 = 0$$

अथवा $\quad x^2 - y^2 = \frac{xy(a-b)}{h}$

अतः $\quad \boxed{\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}}$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. समीकरण $x^2+2xy \operatorname{cosec}\theta-y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के अर्धकों का समीकरण ज्ञात करो।

क्रिया : यहाँ $a=1,\ b=-1, h=\operatorname{cosec}\theta$

सूत्र के द्वारा कोणों के अर्धकों का अभीष्ट समीकरण है

$$\frac{x^2-y^2}{1-(-1)}=\frac{xy}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\frac{x^2-y^2}{2}=xy\sin\theta$$

✓अर्थात $\quad x^2-2xy\sin\theta-y^2=0$

उदाहरण 2. सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ से निरूपित सरल रेखा युग्म पर बिन्दु (x', y') से डाले गये लम्बो का गुणनफल

$$\frac{ax'^2+2hx'y'+by'^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}} \text{ है।}$$

[राज; 50,55,56,63]

क्रिया : माना कि दिया हुआ समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ ....(1)

निम्न दो रेखाओं को प्रदर्शित करता है—

$$y-m_1x=0 \text{ तथा } y-m_2x=0 \qquad ....(2)$$

अतः उनका सयुक्त समीकरण होगा

$$b(y-m_1x)\,(y-m_2x)=0 \qquad ....(3)$$

(1) तथा (3) सर्व सम होंगे अतः

$$m_1+m_2=\frac{-2h}{b} \text{ और } m_1m_2=\frac{a}{b} \qquad ....(4)$$

दोनों रेखाओं पर दिये गए बिन्दु (x', y') से डाले गये लम्बों का गुणनफल

$$=\frac{y'-m_1x'}{\sqrt{1+m_1^2}}\times\frac{y'-m_2x'}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

$$=\frac{y'^2-(m_1+m_2)\,x'y'+m_1m_2x'^2}{\sqrt{1+m_1^2+m_2^2+m_1^2m_2^2}}$$

]

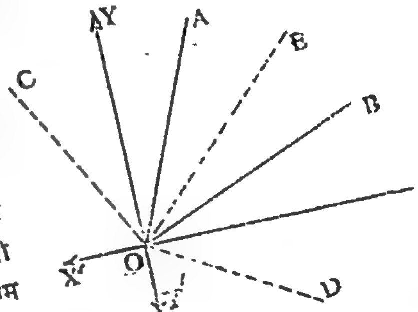
$$= \frac{y'^2 - (m_1+m_2)x'y' + m_1 m_2 x'^2}{\sqrt{1+(m_1+m_2)^2 - 2m_1m_2 + (m_1m_2)^2}} \qquad [\text{(4) से}]$$

$$= \frac{y'^2 - \left(-\frac{2h}{b}\right)x'y' + \frac{a}{b}x'^2}{\sqrt{1+\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 2\times\frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}$$

$$= \frac{ax'^2 + 2hx'y' + by'^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि समीकरण $a^2x^2 + 2h(a+b)xy + b^2y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं से समान कोण बनाती है।

क्रिया : मान लो प्रथम समीकरण से निरूपित रेखाएँ OA तथा OB है तथा द्वितीय समीकरण से निरूपित OC तथा OD है।



चित्र 37

जैसा कि हम समतल ज्यामिति द्वारा जानते हैं कि यदि प्रथम रेखा युग्म के मध्यस्थ कोणों के अर्धक द्वितीय रेखा युग्म के मध्यस्थ कोणों के भी अर्धक हों तो प्रथम रेखा युग्म दूसरे युग्म से समान कोण बनाएगा। अतः हम यही प्रतिवंध सिद्ध करते हैं।

अब प्रथम समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के

$$\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2} = \frac{xy}{h(a+b)}$$

अर्थात $\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$ जो कि द्वितीय समीकरण से निरूपित बीच के कोणों के अर्धक भी हैं। अतः अभीष्ट परिणाम सिद्ध होता

उदाहरण 4. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित दो रेखाओं में से एक अक्षों के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है तो सिद्ध करो कि $(a+b)^2=4h^2$ [राज; 60]

क्रिया : यदि दिये गये समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओं में से एक अक्षों के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है तो उसका समीकरण होगा $y=x$ या $y=-x$ तब मान लो दिये हुए समीकरण द्वारा निरूपित दूसरी रेखा $y=mx$ है।

ताकि $ax^2+2hxy+by^2=b\ (y\mp x)\ (y-mx)$

जिससे $m\pm 1=-\dfrac{2h}{b}$ ....(1)

और $m\times(\pm 1)=\dfrac{a}{b}$ ....(2)

(2) द्वारा हम प्राप्त करते है $m=\pm\dfrac{a}{b}$

m के इस मान को (1) मे प्रतिस्थापित करने पर

$$\pm\left(\frac{a}{b}+1\right)=-\frac{2h}{b}$$

अर्थात् $\pm(a+b)=-2h$

$\therefore$ $(a+b)^2=4h^2$ जो अभीष्ट परिणाम है।

प्रश्नावली 5 (b)

निम्न समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोण ज्ञात करो तथा उन कोणों के अर्धकों के समीकरण भी लिखो—

1. $x^2-2xy-2y^2=0.$
2. $x^2+2xy\sec\theta+y^2=0.$
3. $2x^2-2\sqrt{17}\,xy+4y^2=0.$
4. $5x^2+14xy+8y^2=0.$
5. (i) $x^2+2xy\cot\theta+y^2=0.$ (ii) $x^2-2xy\tan\theta-y^2=0.$

सिद्ध करो कि निम्न समीकरण मूल विन्दु में से जाने वाली दो लम्ब रेखाओं को निरूपित करते हैं। (प्रश्न 6 से 8)

6. $3x^2+7xy-3y^2=0.$

7. $ab(x^2-y^2)+(a^2-b^2)xy=0.$

8. $(x-a)^2+2h(x-a)(y-b)-(y-b)^2=0,$

9. समीकरण $px^2-qxy-y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच में $45°$ का कोण होने के लिए प्रतिवन्ध ज्ञात करो।

10. यदि समीकरण $ax^2-bxy-y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ x-अक्ष से कोण α तथा β वनाती हों तो निम्न व्यंजकों के मान वताओ—
(i) $\tan\alpha-\tan\beta$ (ii) $\cot\alpha+\cot\beta$ (iii) $\tan(\alpha+\beta)$

11. सिद्ध करो कि समीकरण
$$(x^2+y^2)\sin^2\alpha=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2$$
द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच कोण 2α है।

12. मूल विन्दु से होकर जाने वाली और रेखाओं $3x^2-4xy+2y^2=0$ पर लम्ब सरल रेखाओं का समीकरण ज्ञात करो।

13. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित दो में से एक रेखा समीकरण $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ द्वारा निरूपित दो में से एक रेखा के संपाती हो तो इसके लिए प्रतिवन्ध ज्ञात करो।
[राज., 61]

14. यदि समीकरण $x^2-2pxy-y^2=0$ तथा $x^2-2qxy-y^2=0$ से प्रदर्शित होने वाली सरल रेखाओं के जोड़े एक दूसरे के बीच के कोणों के द्विभाजक हैं तो सिद्ध कीजिए $pq=-1.$ [राज., 58, 70]

15. प्रमाणित करो कि युग्म रेखाएँ
$$x^2(\sec^2\theta-\sin^2\theta)-2xy\tan\theta+y^2\sin^2\theta=0,$$
x-अक्ष के साथ जो कोण वनाती है उनके स्पर्शज्या (tangents) का अन्तर 2 है। [राज; 67]

सिद्ध करो कि सरल रेखा युग्म $2x^2+6xy+y^2=0$ सरल रेखा युग्म $4x^2+18xy+y^2=0$ के साथ बराबर-बराबर कोण पर झुका हुआ है। [राज; 50]

सिद्ध कीजिये कि सरल रेखाएँ $ax^2+2hxy+by^2=0$ सरल रेखाओं $ax^2+2hxy+by^2+k\ (x^2+y^2)=0$ के साथ बराबर-बराबर कोण पर झुकी हुई हैं। [राज; 59]

समीकरण $2x^2+9xy+8y^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं पर बिन्दु (3, 2) से डाले गये लम्बों का गुणनफल ज्ञात करो।

निर्देशांकों के मूल बिन्दु से जाने वाली दो रेखाओं की बिन्दु (x_1, y_1) से दूरी d है, सिद्ध करो कि ये रेखायें

$(x_1y-xy_1)^2=d^2(x^2+y^2)$ से निरूपित होती हैं।

सिद्ध करो कि मूल बिंदु से गुजरने वाली और सरल रेखा $x+y=0$ के साथ α कोण बनाने वाली दो सरल रेखाओं का समीकरण $x^2+2\ xy\sec 2\alpha+y^2=0$ है।

वह प्रतिबन्ध ज्ञात करो जबकि $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा प्रदर्शित दो रेखाओं में से एक रेखा $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ द्वारा प्रदर्शित दो रेखाओं में से एक पर लम्ब हो।

व्यापक द्विघात समीकरण

(General second degree equation)

5. वह प्रतिबन्ध ज्ञात करना जिससे व्यापक द्विघात समीकरण

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad ....(1)$$

सरल रेखाओं को निरूपित करे। [राज; 66, 70]

(व्यापक द्विघात समीकरण में x तथा y के द्वितीय घात, एक घात तथा शून्य घात के सभी सम्भव पद होते हैं) जबकि द्वितीय घात के समघाती में केवल द्वितीय घात के ही पद होते हैं।

यदि यह समीकरण दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है तो बाम पक्ष वाला व्यंजक दो एकघाती गुणनखण्डों में विभाजित होना चाहिये

यदि $a \neq 0$ तो समीकरण (1) को a से गुणा करके और तब इसे x के
ती समीकरण के रूप में रखने पर

$$a^2x^2+2ax(hy+g)+a(by^2+2fy+c)=0$$

पक्षान्तरण से

$$a^2x^2+2ax(hy+g)=-a(by^2+2fy+c),$$

अब वाम पक्ष को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए दोनों ओर $(hy+g)^2$ जोड़ने पर

$$a^2x^2+2ax(hy+g)+(hy+g)^2=(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)$$

अर्थात $$(ax+hy+g)^2=y^2(h^2-ab)+2y(gh-af)+g^2-ac$$

$$ax+hy+g=\pm\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)}$$

दो सरल रेखाओं को निरूपित करने के लिये इस समीकरण से दो एक घाती समीकरण प्राप्त होने चाहियें जिसके लिये दाहिनी ओर दिया हुआ करणीगत व्यंजक एक पूर्ण वर्ग होना चाहिये। यह तभी सम्भव है जब

$$(gh-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac)$$

अर्थात $$g^2h^2-2afgh+a^2f^2=g^2h^2-abg^2-ach^2+a^2bc$$

अर्थात $$a(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)=0.$$

अतः अभीष्ट प्रतिबन्ध है

$$\boxed{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0}$$

इस प्रतिबन्ध को निम्न सारणिक (Determinant) के रूप में भी लिख सकते हैं

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$$

पक्ष में दिए गए सारणिक को द्विघात समीकरण का विवेच

5·51. यह प्रतिबन्ध ज्ञात करना जिससे

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

द्वारा दर्शित रेखायें समान्तर हों और इनके बीच की दूरी ज्ञात करना।

[राज; 1960]

यदि व्यापक समीकरण दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करता हो तो मान लो

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$
$$=(\sqrt{a}\,x+\sqrt{b}\,y+k_1)(\sqrt{a}\,x+\sqrt{b}\,y+k_2)$$

समान पदों के गुणांकों की तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं—

$$\sqrt{a}(k_1+k_2)=2g \text{ और } \sqrt{b}(k_1+k_2)=2f$$

जिससे $k_1+k_2=\dfrac{2g}{\sqrt{a}}=\dfrac{2f}{\sqrt{b}}$ ...(i)

और $2\sqrt{ab}=2h$ ...(ii)

तथा $k_1k_2=c$ ....(iii)

(ii) से $ab=h^2$ ....(iv)

अब (i) से $bg^2=af^2$

अथवा $abg^2=a^2f^2$

$\therefore$ $h^2g^2=a^2f^2$

अर्थात् $hg=af$

$\therefore$ रेखा समान्तर होंगी यदि $h^2=ab$ तथा $gh=af$

फिर इन समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

= मूल बिन्दु से इन रेखाओं पर डाले गये लम्बों का अन्तर

$$=\frac{k_1-k_2}{\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}}{\sqrt{a+b}}$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{4g^2}{a}-4c}}{\sqrt{a+b}}$$

$$=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$$

समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

निरूपित रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करना।

मान लो इस समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओं के पृथक्-पृथक् समीकरण हैं–

$$y=m_1x+c_1 \text{ और } y=m_2x+c_2$$

जिनके बीच का कोण $\theta=\tan^{-1}\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

तो $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=b(y-m_1x-c_1)\times(y-m_2x-c_2)$

दोनों पक्षों में x^2 और xy के गुणांकों को बराबर रखने पर

$$m_1+m_2=-\frac{2h}{b} \text{ तथा } m_1m_2=\frac{a}{b}$$

जिससे $m_1-m_2=\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}$

$$=\sqrt{\frac{4h^2}{b^2}-\frac{4a}{b}}=\frac{2}{b}\sqrt{h^2-ab}$$

अतः अभीष्ट कोण $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)=\tan^{-1}\left[\dfrac{2\sqrt{h^2-ab}}{b\left(1+\dfrac{a}{b}\right)}\right]$

या $$\boxed{\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right)}$$

टिप्पणी 1. यह वह कोण है जो समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच होता है, क्योंकि ये मूल विन्दु में होकर जाने वाली रेखाएँ व्यापक समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओं के समान्तर हैं। किसी संख्यात्मक प्रश्न में रेखाओं के समीकरण पृथक् पृथक् निकाल कर भी यह कोण ज्ञात किया जा सकता है।

2. यदि व्यापक द्विघात समीकरण द्वारा निरूपित रेखाएँ समान्तर हों तो $h^2=ab$ और यदि ये परस्पर लम्ब हों तो $a+b=0$.

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. m का वह मान ज्ञात करो जिसके लिए समीकरण $3x^2+mxy-10y^2+7x+19y-6=0$ दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है।

क्रिया : यहाँ $a=3,\ b=-10,\ c=-6,\ f=\frac{19}{2},\ g=\frac{7}{2},\ h=\frac{m}{2}$

समीकरण के दो सरल रेखाओं को निरूपित करने के लिए प्रतिबन्ध है :

$$3\times(-10)(-6)-2\times\frac{19}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{m}{2}-3\times\left(\frac{19}{2}\right)^2 -(-10)\left(\frac{7}{2}\right)^2-(-6)\left(\frac{m}{2}\right)^2=0$$

$$180-\frac{133}{4}m-\frac{1083}{4}+\frac{245}{2}+\frac{3}{2}m^2=0$$

अथवा $\quad 6m^2-133m+127=0$

अथवा $\quad (m-1)(6m-127)=0$

$\therefore\ m=1$ अथवा $\frac{127}{6}$ उत्तर

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि समीकरण $2x^2-7xy+3y^2+x+7y-6=0$ दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है इन रेखाओं के पृथक्-पृथक् समीकरण ज्ञात करो तथा इनका प्रतिच्छेद बिन्दु व उनके बीच का कोण भी ज्ञात करो।

क्रिया : दिये हुए समीकरण के केवल द्विघाती पदों $2x^2-7xy+3y^2$ के गुणन-खण्ड करने पर प्राप्त होता है—

$$2x^2-7xy+3y^2\equiv(2x-y)(x-3y)$$

अब मान लो

$$2x^2-7xy+3y^2+x+7y-6$$
$$\equiv(2x-y+c_1)(x-3y+c_2)$$

अब दोनों पक्षों में x, y के गुणांकों तथा अचर पदों को समान रखने पर

$c_1+2c_2=1$ तथा $-c_2-3c_1=7$ और $c_1c_2=-6$

जिससे $c_1=-3$ तथा $c_2=2$

अतः दिया हुआ समीकरण निम्न सरल रेखाओं को निरूपित करता है—

$$2x-y-3=0 \text{ तथा } x-3y+2=0$$

इनके बीच का कोण $=\tan^{-1}\left(\frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}\right)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

रेखाओं के प्रतिच्छेद विन्दु के लिए, वज्र गुणन द्वारा,

$$\frac{x}{9+2}=\frac{y}{4+3}=\frac{1}{-1+6}$$

$$\therefore x=\frac{11}{5} \text{ तथा } y=\frac{7}{5}$$

दाहरण 3. सिद्ध करो कि $4x^2-4xy+y^2-6x+3y+2=0$ समान्तर रेखाओं का एक युग्म निरूपित करता है और उन रेखाओं के पृथक्-पृथक् समीकरण और इनके बीच की दूरी भी ज्ञात करो।

क्रिया : यहाँ $a=4, b=1, c=2, f=\frac{3}{2}, g=-3, h=-2$

$\therefore$ स्पष्टतः $h^2=ab=4$ और $gh=af=6$

अतः दिया हुआ समीकरण दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करता है।

अब दिए हुए समीकरण को लिख सकते हैं—

$$(2x-y)^2-3(2x-y)+2=0$$

अथवा $(2x-y-2)(2x-y-1)=0$

अतः अभीष्ट समीकरण है

$$2x-y-2=0;\ 2x-y-1=0$$

इन रेखाओं के बीच की दूरी $=\frac{-1+2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

प्रश्नावली 5 (c)

1. सिद्ध करो कि निम्न समीकरण दो सरल रेखाओं को निरूपित करते हैं :
   (*i*) $y^2 - xy - 3x + 2y - 3 = 0$
   (*ii*) $2x^2 - 6y^2 + xy + 2x - 10y - 4 = 0.$

2. k का मान ज्ञात करो यदि $(3x+4y)(x-2y-5) + k(x^2+y^2-25) = 0$ दो सरल रेखाओं को प्रदर्शित करता हो । [राज; 62]

3. k का मान ज्ञात करो जिसके लिए निम्न समीकरण दो सरल रेखाओं को निरूपित करे और उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो ।
   (*i*) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + k = 0.$ [राज; 60]
   (*ii*) $kxy - 8x + 9y - 12 = 0$ [राज; 70]
   (*iii*) $2y^2 + 3xy - 2x^2 - 11y - 2x + k = 0$ [राज; 60]

4. निम्नलिखित समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओं के समीकरण अलग-अलग ज्ञात करो और उनके बीच के कोण तथा प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो :
   (*i*) $6x^2 - y^2 + xy - 5x + 5y - 6 = 0.$
   (*ii*) $x^2 - 12y^2 - xy - x - 17y - 6 = 0.$
   (*iii*) $6x^2 - xy - 15y^2 - 11x + 31y = 10$

5. यदि $6x^2 - 11xy - 10y^2 - 19y + c = 0$ दो सरल रेखाओं को निरूपित करे तो c का मान ज्ञात करो और इन रेखाओं के समीकरण तथा इनके बीच का कोण और प्रतिच्छेद बिन्दु भी ज्ञात करो ।

6. सिद्ध करो कि समीकरण
   $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 40x + 30y - 75 = 0$ दो समलम्ब सरल रेखाओं को निरूपित करता है । उनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात करो । [राज; 64]

सिद्ध करो कि निम्न समीकरण दो समान्तर सरल रेखाओं को निरूपित करते हैं और उनके बीच की दूरी भी ज्ञात करो (प्रश्न 7 से 9)

7. $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-3x-3\sqrt{3}y-4=0$ [राज; 56]

8. $16x^2-88xy+121y^2+4x-11y-6=0$

9. $x^2+6xy+9y^2+4x+12y-5=0$

10. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ रेखाओं के युग्म को प्रदर्शित करता हो तो सिद्ध करो कि इन बिन्दुओं से जहाँ ये रेखाएँ अक्षों पर मिलती है, गुजरने वाली रेखाओं के तृतीय युग्म का समीकरण होगा—

$$ax^2-2hxy+by^2+2gx+2fy+c+\frac{4fg}{c}xy=0$$

[अजमेर बोर्ड; 52]

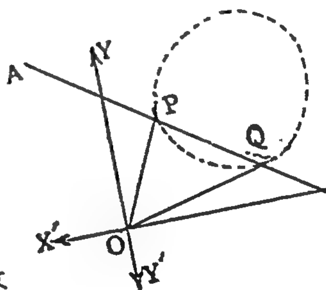
5·7. उन दो सरल रेखाओं का समीकरण ज्ञात करना जो मूल बिन्दु को सरल रेखा

$$lx+my=n \quad ....(1)$$

तथा वक्र

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad ....(2)$$

के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाती हैं [राज; 195



चित्र 38

समीकरण (1) से हम प्राप्त करते हैं—

$$\frac{lx+my}{n}=1 \quad (3)$$

अब हम समीकरण (3) की सहायता से समीकरण (2) को द्वितीय घात में समघाती बनाने पर प्राप्त करते हैं

$$ax^2+2hxy+by^2+2(gx+fy)\left(\frac{lx+my}{n}\right)+c\left(\frac{lx+m}{n}\right.$$

अथवा $x^2(an^2+2lng+cl^2)+2xy(hn^2-mng+fln$
$+y^2(bn^2+2mnf+cm^2)=0$

मान लो दी हुई सरल रेखा (1) वक्र (2) को P तथा ... है जिससे P तथा Q के निर्देशांक समीकरण (1) तथा ... समीकरण (4) को भी सतुष्ट करेंगे ।

[क्योंकि अब P तथा Q सरल रेखा (1) तथा वक्र (2) दोनों पर स्थित हैं, तो ये समीकरण (4) से निरूपित वक्र पर भी स्थित होंगे]
अतएव समीकरण (4) रेखा (1) तथा वक्र (2) के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से जाने वाली किसी बिन्दुपथ को निरूपित करता है। किन्तु यह समीकरण x तथा y में द्वितीय घात का समघात समीकरण है। अतः यह मूल बिन्दु से होकर जाने वाला दो रेखायें निरूपित करता है।

इस प्रकार समीकरण (4) सरलरेखा (1) तथा वक्र (2) के प्रतिच्छेद बिन्दुओं (P तथा Q) को मूल बिन्दु से मिलाने वाली दो रेखाओं को निरूपित करता है।

स्मरण विधि—किसी सरल रेखा तथा द्वितीय घात के समीकरण से निरूपित वक्र के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली इन रेखाओं का समीकरण, वक्र के समीकरण को सरल रेखा के समीकरण की सहायता से द्वितीय घात का समघात समीकरण बनाने पर प्राप्त होता है। ऐसा करने के लिये वक्र के समीकरण के द्विघाती पदों को पहिले अपरिवर्तित रखते हैं, और इसके प्रथम घात के पदों को सरल रेखा के समीकरण से प्राप्त एक घात के ऐसे पदों से गुणा करते हैं जिनका मान 1 होता है तथा शून्य घात के पदों (अचर पदों) को एक घात के इन पदों के वर्ग से गुणा करते हैं। इस प्रकार प्राप्त समीकरण में सब ही पद द्विघाती हो जाते हैं।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि मूल बिन्दु को रेखा $y=3x+2$ और वक्र $x^2+2xy+3y^2+4x+8y-11=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाओं के बीच का कोण

$\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ होगा [राज; 67, 69, 71]

क्रिया : वक्र और रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का संयुक्त समीकरण वक्र के समीकरण को रेखा के समीकरण की सहायता से समघाती बनाने पर प्राप्त होता है—

$$x^2+2xy+3y^2+4x\left(\frac{y-3x}{2}\right)+8y\left(\frac{y-3x}{2}\right)$$
$$-11\left(\frac{y-3x}{2}\right)^2=0$$

या $\quad 4x^2+8xy+12y^2+8xy-24x^2+16y^2-48xy-11y^2$
$$-99x^2+66xy=0$$

या $$119x^2-17y^2-34xy=0$$

या $$7x^2-2xy-y^2=0$$

इस समीकरण द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के बीच का कोण

$$=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{(-1)^2-7(-1)}}{7-1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

उदाहरण 2. मूल बिन्दु को सरल रेखा $y=mx+c$ तथा वक्र $x^2+y^2=a^2$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर समकोण होंगी यदि $2c^2=a^2(1+m^2)$ [राज; 66, 72]

क्रिया : वक्र के समीकरण को रेखा के समीकरण की सहायता से समघात बनाने पर इन रेखाओं का संयुक्त समीकरण होगा

$$x^2+y^2-a^2\left(\frac{y-mx}{c}\right)^2=0$$

अथवा $$x^2(a^2-a^2m^2)+y^2(c^2-a^2)+2a^2mxy=0$$

यदि ये परस्पर समकोण हों तो

$$(c^2-a^2m^2)+(c^2-a^2)=0$$

अर्थात $$2c^2=a^2(1+m^2)$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि मूल बिन्दु को दो वक्रों

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx=0$$

और $$a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x=0$$

के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली दो रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि [राज; 57, 6

$$g'(a+b)=g(a'+b')$$

क्रिया : यहाँ पहिले हम वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण ज्ञात करेंगे। यह समीकरण द्वितीय घात का समघात समीकरण होना चाहिए तथा दिए हुए वक्रों की सहायता से प्राप्त होना चाहिए।

अत: वक्रों के समीकरणों में से x वाले प्रथम घात के पदों को हमको लुप्त करना है। इसके लिए हम (1) को g' तथा (2) को g से गुणा करके घटाने पर प्राप्त करते हैं

$$(ag'x^2+2hg'xy+bg'y^2+2gg'x)-(a'gx^2+2h'gxy+b'gy^2+2gg'x)=0$$

अर्थात् $$(ag'-a'g)x^2+2xy(hg'-h'g)+(bg'-b'g)y^2=0$$

इसके द्वारा निरूपित मूल बिन्दु में से जाने वाली ये दो रेखाएँ परस्पर तब लम्ब होंगी जब इसमें आए हुए x^2 तथा y^2 के गुणांकों का योग शून्य हो।

अत: अभीष्ट प्रतिबन्ध है

$$(ag'-a'g)+(bg'-b'g)=0$$

अर्थात् $$g'(a+b)=g(a'+b')$$

प्रश्नावली 5 (d)

निम्न रेखा तथा वक्र के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाले रेखा युग्म का समीकरण ज्ञात करो :

1. (i) $x-y=3;\ x^2+y^2=9.$
   (ii) $3x-2y=4;\ 4x^2-5xy+y^2-x+2y=8.$
2. सरल रेखा $2x-y=3$ और वक्र $x^2-y^2-xy+3x-6y+18=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली दो रेखाओं का समीकरण तथा उनके बीच का कोण ज्ञात करिये। [राज; 51]

... विन्दु को सरल रेखा $x+y=5$ तथा वक्र

$$x^2-y^2+3xy+2x-y+4=0$$

... प्रतिच्छेद विन्दुओं से मिलाने वाली रेखाओं के मध्यस्थ कोण ज्ञात करो।

... सिद्ध करो कि निम्न सरल रेखा तथा वक्र के प्रतिच्छेद विन्दुओं को मूल विन्दु से मिलाने वाली रेखाएँ लम्बवत है—

(a) $3x-y=2;\ 7x^2-4xy+8y^2+2x-4y-8=0$

(b) $3x-2y=1;\ 3x^2+5xy-3y^2+2x+3y=0$.

(c) $x+y=1;\ 4x^2+4y^2+4x-2y-5=0$

5. यदि निम्न दी हुई रेखा और वक्र के प्रतिच्छेद विन्दुओं को मूल विन्दु से मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर लम्ब हों तो m का मान ज्ञात करो—

(i) $y=mx+1;\ x^2+y^2=1$

ii) $x+y=1;\ x^2+y^2+x-2y-m=0.$

... सिद्ध करो कि मूल विन्दु को सरल रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$

तथा वक्र $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

के प्रतिच्छेद विन्दुओं से मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर तब लम्ब होंगी जब $a^2+b^2=r^2$

7. जिन विन्दुओं में सरल रेखा $y=mx+c$ वक्र $x^2+y^2=2ax+2b$... को काटती है उन्हें मूल विन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का समीकर... ज्ञात करो। फिर उन रेखाओं द्वारा मूल विन्दु पर समकोण बनाने... लिये प्रतिबन्ध ज्ञात करो।

8. वक्र $5x^2+11xy-8y^2+8x-4y+12=0$ और सरल... $x-y=2$ के प्रतिच्छेद विन्दुओं को मूल विन्दु से मिलाने वाली... रेखाओं के बीच कोणों के अर्धक ज्ञात करो।

9. सिद्ध करो कि मूल बिन्दु को $5x^2+12xy-6y^2+4x-2y+3=0$ और $x-y=1$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाएँ x-अक्ष के साथ समान कोण बनाती हैं। [राज; 1958]

10. यदि सरल रेखा $x-y=2$ तथा वक्र $x^2-4xy+2y^2-2x+y+k=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर $45°$ का कोण बनाती हैं तो k का मान ज्ञात करो।

11. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की एक जीवा (chord) $lx+my+1=0$ मूल बिन्दु पर $45°$ का कोण अन्तरित करती है। सिद्ध करो कि
$$4[a^2(l^2+m^2)-1]=[a^2(l^2+m^2)-2]^2$$

12. सिद्ध करो कि सरल रेखा $x-y=2$ और वक्र $5x^2+12xy-8y^2+8x-4y+12=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाएँ x-अक्ष के साथ समान कोण बनाती हैं।

प्रश्नावली 5 (e)

1. समीकरण $6xy+9x-8y-12=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाएँ होंगी—
   (A) $2x+3=0$ तथा $3y-4=0$
   (B) $2y-3=0$ तथा $3x+4=0$
   (C) $3x-4=0$ तथा $2y+3=0$
   (D) $2x-3=0$ तथा $3y+4=0$ ( )

2. समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के समीकरण होंगे—
   (A) $ax-(h\pm\sqrt{h^2-ab})\,y=0$
   (B) $ax\pm(h\pm\sqrt{h^2-ab})\,y=0$
   (C) $ax\pm(h+\sqrt{h^2-ab})\,y=0$
   (D) $ax+(h\pm\sqrt{h^2-ab})\,y=0$ ( )

समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं की प्रवणताओं का गुणनफल होगा—

(A) $-\frac{a}{b}$ (B) $\frac{2h}{b}$

(C) $\frac{a}{b}$ (D) $\frac{-2h}{b}$ ( )

4. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के पृथक्-पृथक् समीकरण $y=m_1x$ तथा $y=m_2x$ हों तो m_1-m_2 का मान होगा—

(A) $\frac{2}{b}\sqrt{h^2-ab}$ (B) $\frac{2}{b}\sqrt{h^2+ab}$

(C) $\frac{2}{a}\sqrt{h^2+ab}$ (D) $\frac{2}{a}\sqrt{h^2-ab}$ ( )

5. समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) होगी—

(A) $\frac{\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$ (B) $\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{(a+b)}$

(C) $\frac{\sqrt{h^2-ab}}{2(a+b)}$ (D) $\sqrt{\frac{2(h^2-ab)}{a+b}}$ ( )

6. समीकरण $x^2+4xy-y^2=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के बीच का कोण होगा—

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90° (

7. समीकरण $ax^2+2hxy-by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि—

(A) $a+b=0$ (B) $a-b=0$

(C) $h^2-ab=0$ (D) $h^2+ab=0$ (

8. समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजकों का समीकरण है—

(A) $\frac{x^2-y^2}{a+b}=\frac{xy}{h}$ (B) $\frac{x^2+y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$

(C) $\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$ (D) $\frac{x^2-y^2}{a+b}=\frac{xy}{h}$ ( )

9. समीकरण $2x^2-3xy+y^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के बीच के कोणो के समद्विभाजकों का समीकरण है—

(A) $\frac{2x^2-y^2}{1}=\frac{xy}{3}$ (B) $\frac{x^2-y^2}{1}=-\frac{2xy}{3}$

(C) $\frac{x^2-y^2}{3}=\frac{2xy}{1}$ (D) $\frac{x^2-y^2}{1}=\frac{2xy}{3}$ ( )

10. व्यापक समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ दो सरल रेखाओं को प्रदर्शित करेगा यदि— [राज; 1970]

(A) $abc+2fgh+af^2+bg^2+ch^2=0$

(B) $abc-2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

(C) $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

(D) $abc-2fgh+af^2+bg^2+ch^2=0$

11. यदि समीकरण $x^2-y^2+x+7y=c$ युग्म रेखाओं को प्रदर्शित करे तो c का मान होगा—

(A) 12 (B) 8 (C) 6 (D) 4 ( )

12. समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ दो समान्तर सरल रेखाओं को निरूपित करेगा यदि—

(A) $h^2-ab=0$ (B) $h^2+ab=0$

(C) $h^2+ab=0$ तथा $af=gh$

(D) $h^2-ab=0$ तथा $af=gh$

[खण्ड (ख) निदर्शक ...

... रेखा $x-y=2$ और वक्र $4x^2-5xy+y^2-x+2y=6$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण है—

(A) $4x^2-5xy+y^2-(x-2y)(x-y)=6(x-y)^2$

(B) $4(4x^2-5xy+y^2)-2(x-2y)(x-y)=6(x-y)^2$

(C) $4x^2-5xy+y^2-2(x-2y)(x-y)=24(x-y)^2$

(D) $4x^2-5xy+y^2-4(x-2y)(x-y)=6(x-y)^2$ ( )

. सरल रेखा $y=3x+1$ और वक्र $4x^2+y^2+3x-2y+7=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखा युग्म का समीकरण होगा—

(A) $4x^2+y^2+(3x-2y)\dfrac{(3x+1)}{y}+7\dfrac{(3x+1)^2}{y^2}=0$

(B) $4x^2+y^2+(3x-2y)\dfrac{(y-1)}{3x}+7\dfrac{(y-1)^2}{9x^2}=0$

(C) $4x^2+y^2+(3x-2y)(y-3x)+7(y-3x)^2=0$

(D) $4x^2+y^2+(3x-2y)\dfrac{(y-1)}{3}+7\dfrac{(y-1)^2}{9}=0$ ( )

विविध प्रश्नावली 5 (f)

(राजस्थान बोर्ड की परीक्षा के प्रश्न)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. समीकरण $3x^2-6xy-7y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजकों का समीकरण होगा— [196...

(A) $\dfrac{x^2-y^2}{10}=\dfrac{xy}{-3}$ (B) $\dfrac{x^2-y^2}{10}=\dfrac{xy}{3}$

(C) $\dfrac{x^2-y^2}{-4}=\dfrac{xy}{-3}$ (D) $\dfrac{x^2-y^2}{-4}=\dfrac{xy}{3}$ (

2. रेखा $y-x=3$ और वक्र $x^2+4y^2=9$ के प्रतिच्छेद विन्दुओं को मूल विन्दु से मिलाने वाली युगल रेखाओं का समीकरण होगा—[1967]

   (A) $x^2+4y^2=(y-x)^2$

   (B) $x^2+4y^2+(y-x)^2=0$

   (C) $x^2+4y^2-9(y-x)^2=0$

   (D) $x^2+4y^2=3(y-x)$ ( )

3. समीकरण $6x^2+41xy+7y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं की प्रवणताओं का गुणनफल होगा— [1967]

   (A) $\frac{7}{6}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{-41}{6}$ (D) $\frac{-41}{7}$ ( )

4. समीकरण $ax^2+2hxy+y^2+2gx+c=0$ के द्वारा दो रेखाएँ निरूपित होने के लिए प्रतिबन्ध लिखो। [1967]

   ....

5. समीकरण $ax^2+8xy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोण के स्पर्शज्या (tangent) का मान लिखो, जबकि $a-b=1$ और $ab=6$. [1967]

   (.................)

6. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित दो सरल रेखाओं की प्रवणतायें m_1 व m_2 हों तो $m_1 m_2$ का मान होगा— [1968]

   (A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{h}{a}$ (D) $\frac{h}{b}$ ( )

7. $\sqrt{3}xy-y^2=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के मध्य कोण होगा—[1968]

   (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90

...मीकरण $x^2-4y^2+2x-4y+c=0$ दो सरल रेखाएँ निरूपित ...रेगा यदि c बराबर है— [1968]

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8 ( )

समीकरण $ax^2+2kxy+by^2=0$ दो संपाती (coincident) रेखाएँ निरूपित करेगा यदि— [1969]

(A) $k^2-ab=0$ (B) $k^2+ab=0$ ( )

(C) $k^2>ab$ (D) $k^2<ab$

10. $x^2+4xy+y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के मध्य कोण होगा–[1969]

(A) 90° (B) 45° (C) 30° (D) 60° ( )

11. यदि समीकरण $ax^2+4hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो $\tan\theta$ का मान होगा— [1970]

(A) $\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$ (B) $\frac{2\sqrt{h^2+ab}}{a-b}$

(C) $\frac{2\sqrt{4h^2-ab}}{a+b}$ (D) $\frac{2\sqrt{4h^2+ab}}{a-b}$ (

12. यदि $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ दो सरल रेख... निरूपित करे तो— [197...

(A) $2abc+fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

(B) $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ (

(C) $2abc+fgh+af^2+bg^2+ch^2=0$

... $+2fgh+af^2+bg^2+ch^2=0$

13. समीकरण $2x^2-4xy+y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के मध्य कोणों के समद्विभाजकों का समीकरण है — [1970]

(A) $\frac{x^2-y^2}{2+1}=\frac{xy}{2}$ (B) $\frac{x^2-y^2}{2-1}=\frac{xy}{2}$

(C) $\frac{x^2-y^2}{2+1}=\frac{xy}{-2}$ (D) $\frac{x^2-y^2}{2-1}=\frac{xy}{-2}$ ( )

14. समीकरण $y^2 \sin^2\theta - xy \sin 2\theta + x^2(\cos^2\theta - 1)=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करो। [1970]

(...............)

15. सरल रेखाओं $x^2-3xy+2y^2=0$ के बीच के कोण के समद्विभाजकों का समीकरण है— [1971]

(A) $\frac{x^2-y^2}{1-2}=\frac{xy}{-3}$ (B) $\frac{x^2-y^2}{1-2}=\frac{2xy}{-3}$

(C) $\frac{x^2-y^2}{1-2}=\frac{2xy}{3}$ (D) $\frac{x^2-y^2}{1-2}=\frac{xy}{3}$ ( )

16. मूल विन्दु को वक्र $x^2+y^2+3x+7=0$ और रेखा $2x=5-3y$ के प्रतिच्छेद विन्दुओं से मिलाने वाली सरल रेखाओं का समीकरण $x^2+y^2+3xP+7P^2=0$ है। जहाँ P बराबर है— [1971]

(A) $\frac{5-2x}{3y}$ (B) $\frac{5-3y}{2x}$

(C) $\frac{2x+3y}{5}$ (D) $\frac{2x+3y}{-5}$ ( )

17. $(2x+3y)^2+3(2x+3y)+2=0$ समान्तर रेखाओं का एक युग्म प्रदर्शित करता है उनके समीकरण ज्ञात करो। [1971]

18. दोनों अक्षों का संयुक्त समीकरण है— [1972]

(A) $x^2+y^2=0$ (B) $x^2-y^2=0$

(C) $\frac{x}{y}=0$ (D) $xy=0$ ( )

(सैद्धान्तिक प्रश्न)

19. यदि सरल रेखा $lx+my=n$ तथा वृत्त $x^2+y^2+2ax=0$ के प्रतिच्छेद विन्दुओं को मूल विन्दु से मिलाने वाली रेखाएँ संपाती (coincident) हों तो सिद्ध करो कि [1968]

$$a^2m^2=n^2+2aln$$

20. दो सरल रेखाएँ $4x+3y-7=0$ तथा $24x+7y-31=0$ के बीच के कोणों के समद्विभाजकों के समीकरण ज्ञात करो। सिद्ध करो कि ये परस्पर समकोण है। [1969]

21. समीकरण $4x^2-4xy+y^2-4x+2y-3=0$ द्वारा निरूपित समान्तर रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। उनके बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए। [1972]

खण्ड (ब)

अवकलन गणित

(Differential Calculus)

6

फलन एवं सीमाएँ
(Functions and Limits)

6·0. प्रस्तावना : गणितीय समस्याओं में बहुधा ऐसी राशियाँ प्रयुक्त होती हैं जिनमे परस्पर कुछ सम्बन्ध होता है। गणित में हम वस्तुओं का नहीं उनके सम्बन्धों का अध्ययन करते हैं और इस प्रकार गणित सब विज्ञानो का द्वार या कुंजी कही जा सकती है।

अवकलन गणित (Differential Calculus) उद्देश्य—कभी-कभी उन परिवर्तनशील राशियों की परिवर्तन की दर मापने की आवश्यकता पड़ती है जो बढ़ती या घटती रहती हैं। अवकलन गणित का मुख्य उद्देश्य ऐसे मापन की विधि बतलाना तथा उनके निर्माण व प्रयोग के नियम बनाना है। इस प्रकार "अवकलन, गणित की वह शाखा है जिसमे हम किसी राशि के परिवर्तन की विधि व दर का अध्ययन करते हैं जबकि एक दूसरी राशि जिस पर वह निर्भर करती है परिवर्तित होती है।" अवकलन गणित, यान्त्रिकी (Mechanics) भौतिक शास्त्र (Physics) व उन सभी विषयो की भाषा है जिनसे परिवर्तनशील मात्राओं का अध्ययन किया जाता है।

6·1. परिभाषाएं :

(1) **राशियाँ (Quantities)**—जो (वस्तुएँ) मापी जा सकती हैं उन्हे राशियां कहते हैं जैसे लम्बाई, आयतन, तापक्रम, समय इत्यादि। राशियाँ दो प्रकार की होती हैं। (*i*) अचर (*ii*) चर। इनका पूर्ण वर्गीकरण आगे दिये अनुसार किया जा सकता है।

राशियाँ (Quantities)

(i) अचर (Constant)
- (a) निरपेक्ष अचर (Absolute Constant)
- (b) स्वेच्छ अचर (Arbitrary Constant)

(ii) चर (Variable)
- (a) स्वतंत्र चर (Independent Variable)
- (b) परतंत्र चर (dependent Variable)

(i) **अचर राशि**—जिस राशि का मान सभी गणितीय संक्रियाओं में सदा एक सा रहता है, वह अचर राशि कहलाती है। इसे बहुधा $a, b,$ इत्यादि अक्षरों से निरूपित करते हैं।

(a) **निरपेक्ष अचर**—गणितीय संख्याएँ $2, 3, \sqrt{5}, \pi, -\frac{2}{3}$ इत्यादि जिनका मान किसी भी गणितीय संक्रिया में नहीं बदलता, निरपेक्ष अचर कहलाता है।

(b) **स्वेच्छ अचर**—जिन अचर राशियों का मान किसी एक विशिष्ट गणितीय संक्रिया के लिए ही स्थिर रहता है किन्तु किसी अन्य संक्रिया में भिन्न हो सकता है, वे स्वेच्छ अचर कहलाते हैं। जैसे किसी सरल रेखा के समीकरण $y=mx+c$ में m और c के मान किसी एक सरल रेखा के लिए ही स्थिर हैं। इनको भिन्न-भिन्न मान देने पर भिन्न-भिन्न रेखाएँ प्राप्त होती हैं।

(ii) **चर राशि**—वह राशि जो एक संक्रिया में संख्यात्मक मानों के किसी समुच्चय में से कोई भी मान ग्रहण कर सकती है चर राशि कहलाती है। चर राशि को बहुधा x, y, z इत्यादि अक्षरों से व्यक्त करते हैं।

समीकरण $y=x^2$ में x, y दोनों ही चर हैं। किन्तु y का मान x के मान पर निर्भर करता है। जैसे $x=2$ के लिए $y=4$ तथा $x=-5$ के लिए $y=25$ इत्यादि। ऐसी दशा में x **स्वतन्त्र** तथा y **परतन्त्र** चर राशि कहलाते हैं।

(2) समुच्चय (Set) परिभाषा : वस्तुओं (Objects) के सुपरिभाषित (well defined) संग्रह (collection) को समुच्चय कहते हैं। प्रत्येक वस्तु या पद को समुच्चय का अवयव (element) कहते हैं।

साधारणतया समुच्चय को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षर जैसे A, B, X, Y इत्यादि तथा उनके अवयव छोटे अक्षर जैसे a, b, x, y, z इत्यादि से निरूपित किए जाते हैं।

उदाहरण 1. प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $=\{1, 2, 3, \ldots\}=N$

2. अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों (vowels) का समुच्चय $=\{a, e, i, o, u\}$

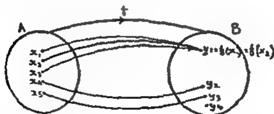
3. 0 और 1 के मध्य वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $=\{x : x$ वास्तविक संख्या है, $0<x<1\}$

6·2. फलन अथवा निरूपण (Function or Mappings) परिभाषा—

यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव x किसी नियम 'f' के द्वारा समुच्चय B के एक अद्वितीय (unique) अवयव y से सम्बद्ध (associate) होता है तो ऐसे नियम 'f' को समुच्चय A का B में निरूपण या फलन अथवा प्रतिचित्रण कहते हैं। इसे प्रतीकात्मक रूप से निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं

$$f : A \to B$$

तथा इसको चित्र द्वारा निम्न प्रकार दर्शाया जाता है



चित्र 39

डोमेन (Domain) परिभाषा—जब किसी फलन f द्वारा समुच्चय A का समुच्चय B में प्रतिचित्रण होता है तो समुच्चय A, उस फलन का प्रान्त या डोमेन कहलाता है।

...रिसर (Range) परिभाषा—समुच्चय B के उन समस्त अवयवों का ...य जो कि किसी फलन द्वारा समुच्चय A के अवयवों का f—प्रतिबिम्ब ...स फलन का परिसर कहलाता है।

...न की वैकल्पिक परिभाषा—

चर राशि y किसी चर राशि x का फलन कहलाती है यदि यह x पर ...स प्रकार निर्भर करे कि किसी दिये हुये डोमेन में x के प्रत्येक मान के लिये ... का एक ही निश्चित मान हो। इस प्रकार फलन y परतन्त्र चर राशि ...है जबकि x एक स्वतन्त्र चर राशि है क्योंकि x अपने प्रान्त में कुछ भी म... ग्रहण कर सकता है किन्तु y ऐसा नहीं कर सकता क्योंकि x को निश्चित मान देने पर y का मान स्वतः ही निश्चित हो जाता है।

y एक से अधिक स्वतन्त्र चर राशियों का भी फलन हो सकता है।

उदाहरण 1. किसी वृत्त का क्षेत्रफल A (जिसके लिये सूत्र $A=\pi r^2$ है;) उसकी त्रिज्या r का फलन है क्योंकि r के प्रत्येक मान के लिए A का एक निश्चित मान होता है।

2. एक गोले (Sphere) का आयतन (जिसके लिये सूत्र $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ है) उसकी त्रिज्या r का फलन होता है।

3. यदि $y=4x^2-3x+2$, तो y, x का फलन है क्योंकि x के प्रत्येक मान के लिए y का केवल एक निश्चित मान होगा।

संकेत—फलन f का x के लिये मान सामान्यतः संकेत $f(x)$ से व्य... किया जाता है इसी प्रकार $\phi(x)$, $\psi(x)$, $F(x)$ आदि विभिन्न फलनों ... व्यक्त करते हैं।

6·3. फलन का मान—स्वतन्त्र चर राशि x के दिये हुये मान के ... फलन का मान, $f(x)$ में केवल x का दिया हुआ मान प्रतिस्थापित ... ज्ञात किया जाता है। x के फलन f का $x=a$ के लिये मान संकेत f... व्यक्त किया जाता है। उदाहरणतः यदि

(i) $f(x)=4x^2-5x+6$ तो $f(2)$ अर्थात् $x=2$ के लि... का मान $=4\times(2)^2-5\times(2)+6=28$ होगा।

(ii) यदि $f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x+4$ तो

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4=3.$$

प्रश्नावली 6 (a)

1. एक फलन f, x के सब मानों के लिए $f(x)=x^3-5x+4$ से परिभाषित किया जाता है तो $f(x)$ के मान ज्ञात कीजिए जबकि
   (a) $x=1$ (b) $x=2$ (c) $x=-3$

2. यदि $f(x)=3\cos^2 x-4\cos x$ तो
   $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ और $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $y=f(x)=\frac{4+x}{4-x}$ और $z=f(y)$ तो z को x के फलन के रूप में व्यक्त करिए।

4. यदि $f(x)=x^2-4x+3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$$

5. यदि $f(x)=\log x$ तो सिद्ध कीजिए कि
   (i) $f(xy)=f(x)+f(y)$
   तथा (ii) $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

6. यदि $f(x)=e^x$ तो सिद्ध करिए कि
   (i) $f(x+y)=f(x)\times f(y)$
   और (ii) $f(x-y)=f(x)\div f(y)$

रूप वाले फलन और उनका मान—

भी कभी ऐसे फलन भी प्रयोग में आते हैं जिनका स्वतन्त्र चर राशि के ानों के संगत कोई निश्चित मान नहीं होता जैसा कि एक फलन की ापा के अनुसार होना चाहिए। ऐसा फलन स्वतन्त्र चर राशि के उन ों के लिए अपरिभाषित कहलाता है

न $y=f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ में जब $x=3$ रखते हैं तो फलन $\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$ का प धारण कर लेता है जिसका कोई निश्चित मान नहीं होता। अतः यह $\frac{0}{0}$ रूप अनिधार्य (Indeterminate) कहलाता है। इसका वास्तव में कु भी मान नहीं होता यद्यपि देखने मात्र से इसका मान कुछ भी सिद्ध किया सकता है।

उदाहरण (*i*) यदि $a\times b=c$ तो $\frac{c}{a}=b$

$0\times 1=0$ तो $\frac{0}{0}=1$

इसी प्रकार $0\times 1=0$ तो $\frac{0}{0}=1$

(*ii*) फिर क्योंकि $0\times 5=0$ अतः $\frac{0}{0}=5$

इस प्रकार यदि शून्य से भाग देना सम्भव हो तो $\frac{0}{0}$ का मान किसी भी संख्या के बराबर सिद्ध किया जा सकता है। और इससे बड़े गलत व भ्रमात्मक परिणाम निकलते हैं जैसे क्योंकि $3\times 0=7\times 0$

दोनों पक्षों को 0 से भाग देने पर हम प्राप्त करते हैं—

$$3\times \frac{0}{0}=7\times \frac{0}{0}$$

अतः यदि $\frac{0}{0}$ का मान 1 लें तो $3=7$ जो बिल्कुल गलत है।

अतः बीजगणित के साधारण नियमों के अनुसार शून्य से भाग देना वर्जि है। ठीक ही कहा है "तुम शून्य से भाग नहीं दोगे"।

6·5. फलन की सीमा (Limit of a function)—फलन की सीमा परिभाषा देने के पूर्व इस सन्दर्भ में प्रयुक्त की जाने वाली निम्न बात ज्ञान आवश्यक है :—

(*i*) किसी राशि का मापांक या निरपेक्ष मान (Modulus or absolute value.)

किसी भी राशि के मापांक से हमारा तात्पर्य उसके संख्यात्मक मान से है। जिसमे उसके चिह्न पर ध्यान नही दिया जाता। उदाहरणतः 6 या –6 का मापांक एक ही है, अर्थात् 6 तथा इसे हम संकेतात्मक रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं—

$$|6|=|-6|=6$$

इसी प्रकार $|a-b|$ से हमारा अर्थ a तथा b के अन्तर के धनात्मक मान से होता है अर्थात् यदि $a>b$ तो $|a-b|=a-b$

और यदि $a<b$ तो $|a-b|=b-a$

उदाहरणतः $|8-5|=|3|=3$

और $|5-8|=|-3|=3$

इसी प्रकार $|8-5|=|5-8|=3.$

(*ii*) अनन्तता की ओर अग्रसर होना—यदि कोई चर राशि बढ़ती और बढ़ती ही चली जाए और अन्त में विचार गम्य किसी भी संख्या से बड़ी हो जाए तो इसे 'अनन्त की ओर अग्रसर होती है' कहते हैं। किन्तु इससे यह नही सोचना चाहिए कि अनन्त (Infinity) भी 100, 1000 या 10,000,000 की जैसी कोई बड़ी संख्या है। वास्तव में इसका कोई निश्चित मान या वास्तविक स्थिति नही होती।

संकेत (Symbol) : यदि x अनन्त की ओर अग्रसर हो तो उसे $x\to\infty$ संकेत से व्यक्त करते हैं। उदाहरणतः यदि $x=1^2, 2^2, 3^2, 4^2,....n^2$, तो हम देखते हैं कि चाहे हम कितनी भी बड़ी संख्या n ले लें x का मान उससे भी बड़ा सोचा जा सकता है।

(*iii*) चर राशि x की सीमा—यदि एक चर राशि x किसी निश्चित नियम के अनुसार मान ग्रहण करती हुई किसी निश्चित संख्या l के अधिक और अधिकतर निकट इस प्रकार पहुँचे कि अन्त मे x तथा l के अन्तर के (निरपेक्ष) मान को जितना भी छोटा हम बनाना चाहें बना सकें तो l को x की सीमा कहते हैं और x सीमा l को प्राप्त किया हुआ कहलाता है। इसे सकेतात्मक रूप में इस प्रकार रखते हैं—

$|l-x|<$ कोई भी छोटी से छोटी धनात्मक संख्या

तथा संक्षेप में $\text{Lim}\, x=l$ लिखते हैं। और इसको पढ़ते हैं "x की सीमा l है।"

उदाहरण 1. मान लो हम कोई चर राशि $x=\frac{1}{2^n}$ लें जो क्रमश: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ मान ग्रहण करती है। यहाँ n के वहुत बड़े मान के लिए x और शून्य (0) का अन्तर बहुत छोटा व नगण्य वनाया जा सकता है। अत: यहाँ Lim $x=0$ जवकि n अनन्त रूप से वढ़ जाता है।

उदाहरण 2. जैसे कि विद्यार्थीगण सुपरिचित हैं गु. श्रे.

$a, ar, ar^2\ ar^3, \ldots$ के n पदों का योग

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

अव यदि $|r|<1$ तो जैसे जैसे n वढ़ता जाता है, r^n घटता जाता है और जब n अनन्त की ओर अग्रसर होता है, r^n शून्य की ओर अग्रसर होता है। अत: n के अनन्त मान के लिए गु. श्रे. के योग व राशि $\frac{a}{1-r}$ के मान का अन्तर नगण्य हो जायेगा अत:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$$

6·6. फलन की सीमा (Limit of a function)

स्वतन्त्र चर x के किसी दिये हुये मान के लिये फलन $f(x)$ की सीमा वह निश्चित राशि है जिससे $f(x)$ के अन्तर को जितना भी छोटे से छोटा हम बनाना चाहें वना सकते हैं जबकि x अपने दिये हुये मान के बहुत ही निकट पहुंच जाए।

इस प्रकार फलन $f(x)$ सीमा 'L' की ओर अग्रसर करता हुआ कहलाता है जवकि x अपने मान 'a' की ओर अग्रसर होता है यदि $|f(x)-L|$ किसी भी छोटी से छोटी धनात्मक संख्या से कम बनाया जा सके। इसे संकेतात्मकत: ऐसे लिखते हैं :

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

जिसे पढ़ते हैं "जब x, a की ओर अग्रसर होता है तो $f(x)$ की सीमा L है।"

6·7. फलन की सीमा व मान में अन्तर—

(*a*) जैसा कि उपरोक्त विवरण से स्पष्ट है फलन की सीमा वह राशि है जिसकी ओर फलन क्रमशः अग्रसर होता है जबकि स्वतन्त्र चर x अपने निर्धारित मान 'a' की ओर अग्रसर होता है। किन्तु $f(x)$ का $x=a$ पर मान वह संख्या है जो फलन की परिभाषा द्वारा x को ठीक a रखकर प्राप्त किया जाता है अर्थात् $x=a$ पर $f(x)$ का मान $f(a)$ होता है।

(*b*) सीमा ज्ञात करने के लिये हमें $x=a$ के आसपास में $f(x)$ के मानों को देखना पड़ता है और उनको अध्ययन करके निष्कर्ष निकालना पड़ता है कि $f(x)$ किस ओर अग्रसर हो रहा है।

अर्थात् सीमा ज्ञात करने के लिये हमें $x=a$ पर $f(x)$ का क्या मान है यह देखने की आवश्यकता नहीं जबकि $f(x)$ का $x=a$ पर मान ज्ञात करने के लिए हमें केवल $x=a$ पर ही $f(x)$ का मूल्य देखना होता है।

(*c*) किसी फलन की सीमा व मान का परस्पर समान होना आवश्यक नहीं है। यह भी सम्भव है कि $x \to a$ के लिए किसी फलन की सीमा का अस्तित्व तो हो किन्तु $x=a$ पर मान हो ही नहीं।

उदाहरण: $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ का $x=3$ पर मान व $x \to 3$ के लिये सीमा ज्ञात कीजिए।

क्रिया : जब हम दी हुई भिन्न में ठीक $x=3$ रखते हैं तो भिन्न $\frac{0}{0}$ रूप धारण कर लेती है, जिसका कोई निश्चित मान नहीं होता। अतः $x=3$ पर $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता है। किन्तु जैसा कि हम आगे

प्रदर्शित करेंगे $x \to 3$ के लिये दी हुई भिन्न की सीमा एक निश्चित राशि है जो ज्ञात की जा सकती है। इसके लिए हम x और $\frac{x^2-9}{x-3}$ के मानों के लिए निम्न सारणी बनाते हैं—

जब $x=$	6	5	4	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{8}$	$3\frac{1}{10}$	$3\frac{1}{32}$	$3\frac{1}{100}$	$3\frac{1}{1000}$	$3\frac{1}{10000}$	......
$\frac{x^2-9}{x-3}=$	9	8	7	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{10}$	$6\frac{1}{32}$	$6\frac{1}{100}$	$6\frac{1}{1000}$	$6\frac{1}{10000}$	......

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे x किसी मान 6 से घटता हुआ अपने निर्धारित मान 3 की ओर अग्रसर होता है तब दिया हुआ फलन भी एक निश्चित मान 6 की ओर अग्रसर होता है।

इसी प्रकार निम्न सारणी से भी स्पष्ट है कि x का मान क्रमशः बढ़ता हुआ जैसे-जैसे अपने मान 3 की ओर अग्रसर होता है, दिया हुआ फलन उसी निश्चित मान 6 की ओर अग्रसर होता है।

जब $x=$	1	2	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{7}{8}$	$2\frac{15}{16}$	$2\frac{99}{100}$	$2\frac{999}{1000}$	$2\frac{9999}{10000}$
$\frac{x^2-9}{x-3}=$	4	5	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	$5\frac{7}{8}$	$5\frac{15}{16}$	$5\frac{99}{100}$	$5\frac{999}{1000}$	$5\frac{9999}{10000}$

अतः दोनों अवस्थाओं में ही जैसे-जैसे x अपने निर्धारित मान 3 की ओर अग्रसर होता है, $\frac{x^2-9}{x-3}$ भी 6 की ओर अग्रसर होता है।

जब $x \to 3$ तो $\frac{x^2-9}{x-3}$ की सीमा 6 होगी।

अर्थात् $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

6·8. सीमाओं पर कुछ प्रमेय (Some theorems on limits)

यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ और $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, तो

1. $\lim\limits_{x \to a} [c f(x)] = cA$, जहाँ c कोई अचर है
2. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{k}\right] = \dfrac{A}{k}$, यदि $k \neq 0$
3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm P] = A \pm P$,
4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = A \times B$
6. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{A}{B}$

6·9. फलनों की सीमाएँ ज्ञात करना (Evaluation of limits of functions)

क्रिया विधि :—

I जब $\lim x \to a$, जहाँ a एक परिमित राशि है :—

(1) दिये हुए फलन में $x = a + h$ रख लें जिससे जैसे-जैसे x अपने निर्दिष्ट मान a की ओर अग्रसर होता है, h शून्य की ओर अग्रसर होता है अर्थात् जब $x \to a$ तो $h \to 0$.

(2) इस प्रकार प्राप्त फलन के मान को सरल करलें । यदि सम्भव हो तो भिन्न रूपी फलन के अंश व हर को h से भाग भी दे दें ।

(3) अन्त में h को शून्य की ओर अग्रसर करके वह राशि ज्ञात कर लें जिसकी ओर सरलीकृत फलन अग्रसर होता है । ऐसा करने के लिए प्रायः अन्त में h का मान ही शून्य रखकर अभीष्ट सीमा प्राप्त करते हैं ।

...कल्पिक विधि—क्योंकि सीमा ज्ञात करने में $x \neq a$ अर्थात् x शून्य के बराबर नहीं होता अतः $x-a \neq 0$ अतः हम फलन के अंश व हर को a से भाग दे सकते हैं और फिर सरलीकृत फलन की सीमा ज्ञात कर ... हैं।

II. जब $\text{Lim } x \to \infty$

फलन में $x = \frac{1}{y}$ रखकर सीमा को $y \to 0$ रूप में बदल लेंवे, ...कि जब $x \to \infty$ तो $y \to 0$ और तब उपरोक्त विधि के अनुसार सीमा का मान ज्ञात करें।

कुछ महत्वपूर्ण सीमाओं के मान—

(1) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

(2) $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$

(3) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$

इनके लिए समतल त्रिकोणमिति की कोई भी प्रमाणिक पुस्तक देखें।

6·10. सिद्ध करो कि

(a) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$

मान लो $\quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log_e y = x \log_e \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

अब क्योंकि $x \to \infty$ इसलिए $\frac{1}{x}$ को 1 से कम मान सकते हैं।

प्रसार करने पर

$$log_e y = x\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \ldots\ldots\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} - \ldots\ldots\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left[\text{ एक अभिसारी (Convergent) श्रेणी* }\right]$$

अतः जब $x \to \infty$, तब

$$\lim_{x\to\infty} log_e y = 1$$

इसलिये $\lim_{x\to\infty} y = e$

अर्थात् $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

इस परिणाम में x को $\frac{1}{x}$ से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है—

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

उपप्रमेय : $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

क्योंकि $\lim_{\frac{x}{a}\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a = e^a$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$

हम जानते हैं कि $a^x = e^{x\,log_e a}$

$$= 1 + x\,log_e a + \frac{x^2}{2!}\left(log_e a\right)^2 + \ldots\ldots$$

---

*एक अनन्त श्रेणी जिसका योग एक निश्चित राशि हो अभिसारी (Convergent) श्रेणी कहलाती है।

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\log_e a+x\frac{(\log_e a)^2}{2!}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\log_e a+x\times(\text{एक अभिसारी श्रेणी})\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\log_e a\right]$$

$$=\log_e a$$

अतः $\lim_{x\to 0}\frac{ax-1}{x}=\log_e a$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x-a}$ का मान ज्ञात करो जबकि m एक धन पूर्ण संख्या है। [राज; 67]

क्रिया : मान लो $x=a+h$ और जब $x\to a$ तो $h\to 0$

अतः $\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^m-a^m}{(a+h)-a}$

$(a+h)^m$ का द्विचर प्रमेय से प्रसार करने पर

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^m-a^m}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[ma^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}h^2+\ldots\ldots+h^m\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(ma^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}h+\ldots\ldots\right)$$

$$=ma^{m-1}$$

उदाहरण 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ ज्ञात करो [राज. 61, 63, 67]

क्रिया : अंश तथा हर को abx से गुणा करने पर

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{bx}{\sin bx}\times\frac{a}{b}$$

या $\underset{x\to}{\text{Lim}} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = 1 \times 1 \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$

उदाहरण 3. $\underset{x\to 0}{\text{Lim}} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ ज्ञात करो   [राज; 54, 69]

क्रिया : a^x तथा b^x का चर घातांकी प्रमेय द्वारा प्रसार करने पर

$$\underset{x\to 0}{Lim} \frac{a^x - b^x}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lim}} \frac{1}{x}\Big[\{1 + x\log_e a + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + ...\}$$
$$- \{1 + x\log_e b + \frac{x^2}{2!}(\log_e b)^2 + ...\}\Big]$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lim}}\Big[(\log_e a - \log_e b) + \frac{x}{2!}\Big\{(\log_e a)^2 - (\log_e b)^2\Big] + ...\Big\}$$

$$= \log_e a - \log_e b = \log_e \frac{a}{b}$$

उदाहरण 4. $\underset{x\to 0}{\text{Lim}} \dfrac{(e^x - e^{-x})}{x}$ ज्ञात करो।   [राज; 61, 68]

क्रिया : चर घातांकी प्रमेय से

$$\underset{x\to 0}{\text{Lim}} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{1}{x}\Big[\Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\Big)$$
$$- \Big(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\Big)\Big]$$
$$= \underset{x\to 0}{\text{Lim}}\Big[\frac{2}{x}\Big(x + \frac{x^3}{3!} + ...\Big)\Big]$$
$$= \underset{x\to 0}{\text{Lim}}\Big[2 + \frac{2x^2}{3!} + ...\Big] = 2$$

उदाहरण 5. $\underset{x\to 0}{\text{Lim}} \dfrac{1}{x}\Big(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\Big) = 1$

[राज; 4

क्रिया : द्विपद प्रमेय से $\sqrt{1+x}$ तथा $\sqrt{1-x}$ का प्रसार करने पर

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\left\{1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\quad \ldots\right\}\right.$$

$$-\left.\left\{1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\quad\ldots\right\}\right]$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^2+\quad \ldots\Bigg\}\Bigg]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x}\left\{\frac{x}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^2+\quad\ldots\right\}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[2\left\{\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\right.\right.$$

$$=1$$ उत्तर

उदाहरण 6. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2)$ [राज; 62]

क्रिया : हम जानते हैं कि

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2=\frac{1}{6}\,n(n+1)\,(2n+1)$$

अतः $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

प्रश्नावली 6 (b)

निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए—

1. $\lim_{x \to 1} \frac{2x-2}{x-1}$
2. $\lim_{x \to a} \frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$
3. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$
4. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$
5. $\lim_{x \to a} \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$
6. $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2-4x+1}{x^2-4x+3}$
7. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$
8. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-8}$
9. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+3}{2x^2-7}$
10. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$
11. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$
12. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
13. $\lim_{x \to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$
14. $\lim_{x \to \infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$
15. $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ [राज.,66]
16. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$
17. $\lim_{x \to \pi} \frac{1+\cos x}{\tan^2 x}$ [राज., 62]
18. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$
19. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$
20. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\sin\frac{x}{4}\right)$
21. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^{1-x}}$
22. $\lim_{x \to 0} \frac{(e^x+e^{-x}-2)}{x^2}$ [राज. 64]
23. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\{(1$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ [राज., 53]

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ [राज; 70]

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})$ [राज; 56,64]

7. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})$

28. $\lim_{n\to \infty} \frac{\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{2n^2+1}}{4n+3}$

29. $\lim_{n\to \infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots\ldots n+)$

30. $\lim_{n\to \infty} \frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$

प्रश्नावली 6 (c)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ का मान है— ( )

(A) na^n (B) $(n-1)a^n$

(C) na^{n-1} (D) $(n-1)\,a^{-1}$

2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ का मान है— (

(A) $\frac{m}{n}$ (B) $\frac{m-1}{n-1}$ (C) 0 (D) ∞

3. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots\ldots+n)$ का मान है— (

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) -1

4. यदि $f(x)=3\sin^2 x+4\cos x$ तो $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ का मान लिखो (.....

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ का मान लिखो । (................)

6. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ का मान लिखो । (................)

7. $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ तो

(A) $f(x)=10$ (B) $\lim_{x \to 5} f(x)=10$

(C) $f(5)=\lim_{x \to 5} f(x)=10$ (D) इनमे से कोई नहीं ( )

प्रथम सिद्धान्तों से अवकलन
(Differentiation from first principles)

0. माना $y=f(x)$, x का कोई संतत फलन (continuous function) , जहां x स्वतन्त्र तथा y परतन्त्र चर राशि है। जब चर राशि x एक मान से दूसरे समीप के मान में परिवर्तित होती है, तब इन दो मानों के अन्तर को x में वृद्धि (increment) कहते हैं तथा इस वृद्धि को δx से व्यक्त करते हैं और इसे "डेल्टा x" पढ़ते हैं।

चूंकि y का मान x के मान पर आश्रित है अतः यदि x के मान में कोई स्वेच्छ (arbitrary) अल्प वृद्धि δx (या h) की जाय तो y के मान में भी संगत वृद्धि मान लो δy होगी। तब भिन्न $\frac{\delta y}{\delta x}$, x के सापेक्ष y की वृद्धि की औसत दर (average rate) होगी। फिर यदि δx छोटा होता हुआ शून्य की ओर अग्रसर , तो δy भी छोटा होता हुआ शून्य की ओर अग्रसर होगा।

जब $\quad y=f(x)$ तो

$$y+\delta y=f(x+\delta x)$$

$$\therefore \delta y=f(x+\delta x)-f(x)$$

$$\text{अतः} \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

अवकल गुणांक (Differential coefficient) परिभाषा—

जब $\delta x \to 0$, y का x के सापेक्ष अवकल गु[...] भिन्न $\frac{\delta y}{\delta x}$ की सीमा को कहते हैं और इसे संकेत $\frac{dy}{dx}$ से व्यक्त करते हैं।

अर्थात् $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

इसी प्रकार $\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ को $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक या अवकलज (derivative) कहते हैं और इसे $\frac{d}{dx} f(x)$ से व्यक्त करते हैं।

अवकलन (Differentiation)—किसी दिये हुए फलन $f(x)$ का अवकल गुणांक ज्ञात करने की क्रिया को अवकलन कहते हैं।

संकेतन (Notation)— फलन $f(x)$ के अवकल गुणांक को साधारणतया $\frac{df(x)}{dx}$ या $\frac{d}{dx}f(x)$ या $f'(x)$ या $Df(x)$ लिखते हैं।

यदि $y=f(x)$, तो x के सापेक्ष y [या $f(x)$] के अवकल गुणांक को $\frac{dy}{dx}$ या $\frac{d}{dx}y$ या y' या Dy लिखते हैं।

विशेष स्थिति : यदि $f(x)$, x का कोई फलन हो तो

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

को $f(x)$ का $x=a$ पर x के सापेक्ष अवकल गुणांक कहते हैं तथा इसे $\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x=a}$ या $f'(a)$ द्वारा निरूपित करते हैं।

टिप्पणी 1. "δx" से अभिप्राय "डेल्टा गुणा x" नहीं है, अपितु यह संकेत x में वृद्धि का प्रतीक है।

2. यह वृद्धि चर राशि के बढ़ने अथवा घटने के अनुसार ऋण हो सकती है।

3. $\frac{dy}{dx}$ का अर्थ भिन्न $dy \div dx$ कदापि नहीं है। वास्तव में $\frac{dy}{dx}$ तो केवल एक संकेत (symbol) मात्र है जो $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ अर्थात् y के अवकलन को निरूपित करता है, जबकि $\frac{\delta y}{\delta x}$ का अर्थ $\delta y \div \delta x$ है।

7·1. प्रथम सिद्धान्तों अथवा परिभाषा से अवकलन—

सीधे परिभाषा से अवकल गुणांक ज्ञात करने की विधि प्रथम सिद्धान्तों से अवकलन करना कहलाती है।

इनके लिए नीचे दी हुई क्रिया विधि का प्रयोग करते हैं।

I. दिये हुये x के फलन $f(x)$ को y के बराबर रखो अर्थात $y = f(x)$

II. फलन में x को $x + \delta x$ और y को $y + \delta y$ में परिवर्तित करो अर्थात $y + \delta y = f(x + \delta x)$

III. प्राप्त फल में से दिए हुए फलन को घटाकर δy ज्ञात करो अर्थात् $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

IV. दोनों पक्षों में δx का भाग दो

अर्थात $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$

V. अन्त में इस प्रकार प्राप्त वृद्धि अनुपात की सीमा ज्ञा[त करो] जबकि δx शून्य की ओर अग्रसर होता है।

अर्थात $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$

कभी कभी कुछ जटिल फलनों का प्रथम सिद्धान्तो से अवकलन कठिन हो जाता है। अतः यहां हम कुछ मानक फलनों का प्रथम सिद्धान्तों से अवकल गुणांक ज्ञात करके कुछ महत्वपूर्ण नियमों का प्रतिपादन करेंगे। जो अन्य फलनों के अवकलन में प्रमेय के रूप में प्रयोग किये जा सकेंगे।

7·2. x^n का प्रथम सिद्धान्तों से अवकल गुणांक—

I माना कि $y = x^n$

II. $y + \delta y = (x + \delta x)^n$

III. $\delta y = (x + \delta x)^n - x^n$

IV. $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{(x + \delta x)^n - x^n}{\delta x}$

$$= \frac{x^n}{\delta x}\left[\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)^n - 1\right]$$

अब चूंकि $\delta x \to 0$, इसलिए $\dfrac{\delta x}{x}$ को 1 से कम मान सकते हैं अतः $\left(1 + \dfrac{\delta x}{x}\right)^n$ का द्विपद प्रमेय से प्रसार कर सरल करने पर

$$\frac{\delta y}{\delta x} = x^n\left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2\,!}\frac{\delta x}{x^2} + \ldots\right]$$

$$= nx^{n-1}\left[1 + \frac{\delta x}{x} \times (\text{एक अभिसारी श्रेणी})\right]$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} nx^{n-1}\left[1 + \frac{\delta x}{x} \times (\text{एक अभिसारी श्रेणी})\right]$$

अतः $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}} \ldots$$

विशेष स्थिति : यदि $n=1$, तो

$$\frac{d}{dx}x^1 = 1.\ x^{1-1} = 1.\ x^0 = 1, \qquad (\because x^0 = 1)$$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

अर्थात् चर का स्वयं के सापेक्ष अवकल गुणांक इकाई या 1 होता है।

टिप्पणी—साधारणतया फलनों का अवकलन, मानक परिणामों की सहायता से किया जाता है जब तक कि प्रथम सिद्धान्त से न चाहा गया हो।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. प्रथम सिद्धान्तों से $\frac{1}{\sqrt{x}}$ का अवकलन करो। [राज; 62, 6..]

क्रिया : I. माना $y = x^{-\frac{1}{2}}$

$$y + \delta y = (x+\delta x)^{-\frac{1}{2}}$$

II. $$\delta y = (x+\delta x)^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

III. $$\delta y = x^{-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

या $$\delta y = x^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\delta x}{x} + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 \ldots\ldots\right.$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}\delta x}{\delta x}\left[-\frac{1}{2x} + \delta x \text{ (एक अभिसारी श्रेणी}\right.$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x} = x^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2x} + \delta x \text{ (एक अभिसारी}\right.$$

V. $$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} x^{-\frac{1}{2}}\left[\ldots\right.$$

या $$\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

सत्यापन (Verification) सामान्य सूत्र में, n को $-\frac{1}{2}$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{dy}{dx}=-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

उदाहरण 2. प्रथम सिद्धान्तों से $\frac{x+1}{x+2}$ का अवकलन करो। [राज; 60]

क्रिया : I. माना $y=\frac{x+1}{x+2}$

II. $$y+\delta y=\frac{(x+\delta x)+1}{(x+\delta x)+2}$$

III. $$\delta y=\frac{(x+\delta x)+1}{(x+\delta x)+2}-\frac{x+1}{x+2}$$

या $$\delta y=\frac{(x+\delta x+1)(x+2)-(x+1)(x+\delta x+2)}{(x+2)(x+\delta x+2)}$$

या $$\delta y=\frac{\delta x}{(x+2)(x+\delta x+2)}$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{1}{(x+2)(x+\delta x+2)}$$

V. $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{(x+2)(x+\delta x+2)}$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+2)^2}$$

प्रश्नावली 7 (a)

सिद्धान्तों से निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करो :

[राज. हायर सेकण्डरी, 73]

x^7 [राज., 50] 3. $x^{\frac{1}{3}}$ [राज., 61]

x^{-2} [राज., 66] 5. $x+\frac{1}{x}$ [राज., 64]

$\sqrt{x}$ [राज., 52] 7. ax^2+bx+c [राज., 56]

. $3x^3+5x^2+10$ [राज., 52] 9. $\frac{2x+3}{3x+4}$ [राज. 55, 58]

8. $(x-2)(x-3)$ [राज.,59] 11. $\sqrt{a^2x^2+b^2}$ [राज. 62]

10. $(ax+bn)^n$ [राज., 65]

7·3. e^x का प्रथम सिद्धान्तों से अवकल गुणांक

I. माना $y=e^x$

II. $y+\delta y=e^{x+\delta x}$

III. $\delta y=e^{x+\delta x}-e^x$

$\delta y=e^x\left[e^{\delta x}-1\right]$

$=e^x\left[1+\delta x+\frac{(\delta x)^2}{2!}+\ldots\ldots-1\right]$

IV. $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{e^x\,\delta x}{\delta x}\left[1+\delta x\text{ (एक अभिसारी श्रेणी)}\right]$

V. $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}e^x\left[1+\delta x\text{ (एक अभिसारी श्रेणी)}\right]$

या $\frac{dy}{dx}=e^x$

फलतः $\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x}$

7·4. a^x का प्रथम सिद्धान्तों से अवकल गुणांक—

I माना $y=a^x$

II. $y+\delta y=a^{x+\delta x}$

III. $\delta y=a^{x+\delta x}-a^x$

$=a^x(a^{\delta x}-1)$

$=a^x\left[1+\delta x\log_e a+\frac{(\delta x\log_e a)^2}{2!}+\dots-1\right]$

$=a^x\ \delta x$ [$\log_e a+\delta x$ (एक अभिसारी श्रेणी)]

IV. $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{a^x\ \delta x}{\delta x}$ [$\log_e a+\delta x$ (एक अभिसारी श्रेणी)]

V. $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}a^x$ [$\log_e a+\delta x$(एक अभिसारी श्रेणी)]

या $\frac{dy}{dx}=a^x\log_e a$

फलतः
$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x.\log_e a}$$

विशेष स्थिति : यदि $a=e$, तब

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x.\log_e e=e^x \quad (\because \log_e e=1)$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. प्रथम सिद्धान्तों से e^{ax} का अवकलन करो।   [राज; 59]

I. माना $y=e^{ax}$

II. $y+\delta y=e^{a(x+\delta x)}$

III. $\delta y=e^{a(x+\delta x)}-e^{ax}$

या $\delta y=e^{ax}\left[e^{a\delta x}-1\right]$

$$=e^{ax}\left[1+a\,x+\frac{(a\,x)^2}{2!}+\ldots-1\right]$$

IV. $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{e^{ax}\,\delta x}{\delta x}\left[a+\delta x\text{ (एक अभिसारी श्रेणी)}\right]$

V. $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}e^{ax}\left[a+x\text{(एक अभिसारी श्रेणी)}\right]$

या $\frac{dy}{dx}=a\,e^{ax}$

उदाहरण 2. प्रथम सिद्धान्तों से 5^x का x के सापेक्ष अवकलन करो। [राज; 60]

क्रिया : अनु. 7·5 के परिणाम में a को 5 से प्रतिस्थापित करने पर

अभीष्ट अवकल गुणांक $=5^x\log_e 5$.

प्रश्नावली 7 (b)

निम्न फलनों का प्रथम सिद्धान्तों से x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करो

1. e^{-3x}
2. e^{-x} [राज
3. $e^{\sqrt{x}}$ [राज; 58]
4. xe^{x}
6. $e^{\sqrt{x+2}}$

7·4. $\log_e x$ का प्रथम सिद्धान्तों से अवकलन गुणांक [प्रश्न, 63, 64]

I. माना कि $y = \log_e x$

II. $y + \delta y = \log_e (x + \delta x)$

III. $\delta y = \log_e (x + \delta x) - \log_e x$

$$= \log_e\left(\frac{x+\delta x}{x}\right) - \log_e\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$$

$\log\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$ का प्रसार करने पर

$$\delta y = \frac{\delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 - \ldots$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta x}{\delta x}\left[\frac{1}{x} - \delta x \text{ (पद अधिकतर होंगे)}\right]$$

V. $$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lim}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{Lim}}\left[\frac{1}{x} - \delta x \text{ (पद अधिकतर होंगे)}\right]$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

फलतः $$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}}$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण—प्रथम सिद्धांतों से $\log_e px$ का अवकलन करो। [प्रश्न 60, 61]

क्रिया : I. माना $y = \log_e px$

II. $y + \delta y = \log_e p(x + \delta x)$

III. $\delta y = \log_e p(x + \delta x) - \log_e px$

$$= \log_e\left[\frac{p(x+\delta x)}{px}\right] - \log_e\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$$

$$\delta y = \frac{\delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 - \ldots$$

VI. $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta x}{\delta x}\left[\frac{1}{x} - \delta x \text{ (प[illegible] होंगे)}\right]$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \delta x \text{ (एक अभिसारी श्रेणी)} \right]$$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ उत्तर

अर्थात् $\frac{d}{dx}(\log_e px) = \frac{1}{x}$

टिप्पणी : $\log_e x$ अथवा $\log_e px$ का अवकल गुणांक $\frac{1}{x}$ ही होता

7·5. त्रिकोणमितीय फलनों का प्रथम सिद्धान्तों से अवकलन—

(a) sin x का अवकल गुणांक

I. माना $y = \sin x$

II. $y + \delta y = \sin (x + \delta x)$

III. $\delta y = \sin (x + \delta x) - \sin x$

या $\delta y = 2 \cos \left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \sin \frac{\delta x}{2}$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\cos \left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \sin \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

V. $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \times \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

या $\frac{dy}{dx} = \cos x \times 1$

इस प्रकार $\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$

(b) cos x का अवकल गुणांक [राज; 63]

I. माना $y=\cos x$

II. $y+\delta y=\cos(x+\delta x)$

III. $\delta y=\cos(x+\delta x)-\cos x$

या $\delta y=2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\delta x}{2}\right)$

या $\delta y=-2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{-\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\frac{\delta x}{2}}$$

V. $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}-\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\times\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

या $\frac{dy}{dx}=-\sin x\times 1$

इस प्रकार $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x}$$

(c) tan x का अवकल गुणांक [राज. बोर्ड; 73]

I. माना $y=\tan x$

II. $y+\delta y=\tan(x+\delta x)$

III. $\delta y=\tan(x+\delta x)-\tan$

$$\delta y = \frac{(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

वा $$\delta y = \frac{\sin(x+\delta x)\cos x - \sin x \cos(x+\delta x)}{\cos x \cos(x+\delta x)}$$

या $$\delta y = \frac{\sin(x+\delta x - x)}{\cos x \cos(x+\delta x)} = \frac{\sin \delta x}{\cos x \cos(x+\delta x)}$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\cos x \cos(x+\delta x)} \times \frac{\sin \delta x}{\delta x}$$

V. $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\cos x \cos(x+\delta x)} \times \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin \delta x}{\delta x}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x . \cos x} \times 1$$

फलत: $$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$ [राज; 59, 65]

(d) cot x का अवकल गुणांक

I. माना $y = \cot x$

II. $y + \delta y = \cot(x+\delta x)$

III. $$\delta y = \frac{\cos(x+\delta x)}{\sin(x+\delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

या $$\delta y = \frac{\cos(x+\delta x)\sin x - \cos x \sin(x+\delta x)}{\sin x \sin(x+\delta x)}$$

या $$\delta y = \frac{\sin(x - x - \delta x)}{\sin x \sin(x+\delta x)}$$

$$= -\frac{\sin \delta x}{\sin x \sin(x+\delta x)}$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{1}{\sin x \sin(x+\delta x)}\times\frac{\sin \delta x}{\delta x}$$

V. $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{-1}{\sin x \sin(x+\delta x)}\times\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin \delta x}{\delta x}$$

या $$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin x.\sin x}\times 1$$

फलतः $$\boxed{\frac{d}{dx}\cot x)=-\text{cosec}^2 x}$$

(e) sec x का अवकल गुणांक

I. माना $y=\sec x$

II. $y+\delta y=\sec(x+\delta x)$

III. $$\delta y=\sec(x+\delta x)-\sec x$$
$$=\frac{1}{\cos(x+\delta x)}-\frac{1}{\cos x}$$

या $$\delta y=\frac{\cos x-\cos(x+\delta x)}{\cos x\cos(x+\delta x)}$$

या $$\delta y=\frac{2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}}{\cos x\cos(x+\delta x)}$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos x\cos(x+\delta x)}\times\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

V. $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos x\cos(x+\delta x)}\times$$
$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\cos x \cos x}\times 1$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x \tan x}$$

cosec x का अवकल गुणांक

माना $\qquad y=\operatorname{cosec} x$

$$y+\delta y=\operatorname{cosec}(x+\delta x)$$

$$\delta y=\operatorname{cosec}(x+\delta x)-\operatorname{cosec} x$$

$$=\frac{1}{\sin(x+\delta x)}-\frac{1}{\sin x}$$

या $$\delta y=\frac{\sin x-\sin(x+\delta x)}{\sin x \sin(x+\delta x)}$$

या $$\delta y=\frac{2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\delta x)}$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\delta x)}\times\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

V. $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}-\frac{\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\delta x)}\times\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

या $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos x}{\sin x \sin x}\times 1$

फलत. $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\text{cosec } x)=-\cot x \text{ cosec } x}$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. प्रथम सिद्धान्तो से $\sin^2 x$ का अवकलन कीजिए । [राज.; 61]

क्रिया : I. माना $y=\sin^2 x$

II. $y+\delta y=\sin^2(x+\delta x)$

III. $\delta y=\sin^2(x+\delta x)-\sin^2 x$

$=\sin(2x+\delta x)\sin \delta x$

$[\because \sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B)]$

IV. $\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{\sin(2x+\delta x)\sin \delta x}{\delta x}$

V. $\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}=\lim\limits_{\delta x\to 0}\sin(2x+\delta x)\times\dfrac{\sin \delta x}{\delta x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\sin 2x$

या $\dfrac{d}{dx}(\sin^2 x)=\sin 2x$

उदाहरण 2. प्रथम सिद्धान्तों से $\sin x^2$ का अवकलन करो :

क्रिया : I. माना $y=\sin x^2$

II. $y+\delta y=\sin(x+\delta x)^2$

III. $\delta y=\sin(x+\delta x)^2-\sin x^2$

$$=2\cos\left[x^2+x\delta x+\frac{(\delta x)^2}{2}\right]\times \sin\left[x\delta x+\frac{(\delta x)^2}{2}\right]$$

$$=2\cos\left[x^2+x\delta x+\frac{(\delta x)^2}{2}\right]\times \sin\delta x\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)$$

IV. $\dfrac{\delta y}{\delta x}$

$$=\frac{2\cos\left[x^2+x\delta x+\frac{(\delta x)^2}{2}\right]\sin\delta x\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\delta x\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}\times\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)$$

अंश व हर को $\left(x+\dfrac{\delta x}{2}\right)$ से गुणा करने पर

V. $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0} 2\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\times \cos\left[x^2+x\delta x+\frac{(\delta x)^2}{2}\right]\times \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\delta x\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}$$

या $\dfrac{dy}{dx} = -a \sin(ax+b)$

फलतः $\dfrac{d}{dx}\left\{ \cos(ax+b) \right\} = -a \sin(ax+b)$

उदाहरण 4 प्रथम सिद्धांतों से $x \sin x$ का अवकलन करो। [राज; 67]

क्रिया : I माना $y = x \sin x$

II $y+\delta y = (x+\delta x) \sin (x+\delta x)$

III $\delta y = (x+\delta x) \sin (x+\delta x) - x \sin x$

या $\delta y = x [\sin (x+\delta x) - \sin x] + \delta x \sin (x+\delta x)$

या $\delta y = x . 2 \cos\left(x + \dfrac{\delta x}{2}\right) \sin\dfrac{\delta x}{2} + \delta x \sin (x+\delta x)$

IV $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{x \cos\left(x+\dfrac{\delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\delta x}{2}}{\dfrac{\delta x}{2}} + \sin (x+ x)$

V $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x \to 0} x \cos\left(x+\dfrac{\delta x}{2}\right) \dfrac{\sin\dfrac{\delta x}{2}}{\dfrac{\delta x}{2}} + \lim\limits_{\delta x \to 0} \sin (x+\delta x)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = x \cos x \times 1 + \sin x$

प्रश्नावली 7 (c)

निम्न फलनों का x के सापेक्ष प्रथम सिद्धान्तों से अवकलन करो—

1. $\sin 2x$ [राज; 66]
2. $\sqrt{\sin x}$
3. $\log_a x$
4. $\cos^2 x$ [राज; 61]
5. $\cos x^2$ [राज; 61]
6. $\sec 5x$

प्रश्नावली 7 (d)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. x^n का अवकल गुणांक है—
   (A) nx^n (B) $(n+1)x_n$
   (C) nx^{n+1} (D) nx^{n-1} ( )
2. a^x का अवकल गुणांक है—
   (A) xa^{x-1} (B) $a^x \log_e a$
   (C) $a^x \log_a e$ (D) $x \log_e a$ ( )
3. $\frac{1}{x}$, निम्न फलन का अवकल गुणांक है—
   (A) $\log x$ (B) $\log \frac{1}{x}$
   (C) x^0 (D) x^{-2} ( )
4. cosec x का अवकल गुणांक है—
   (A) $\cot x$ (B) $\cot x \operatorname{cosec} x$
   (C) $-\cot x \operatorname{cosec} x$ (D) $-\cot x$ ( )
5. $\sec x \tan x$ निम्न का अवकल गुणांक है—
   (A) $\tan x$ (B) $\sec x$
   (C) $\sec x \tan x$ (D) $\operatorname{cosec} x \cot x$ ( )
6. यदि c अचर हो तो c^3 का अवकल गुणांक लिखो। (... ... .)
7. $\log_e \frac{1}{x}$ का अवकल गुणांक लिखो। (...............)
8. 2^x का अवकल गुणांक लिखो। (...............)

8

अवकलन की विधियाँ
(Methods of Differentiation)

अवकलन के मूल प्रमेय

8·0. किसी अचर राशि का अवकलन गुणांक—

मान लो कोई अचर राशि c है, इसलिए

I. $$y=f(x)=c$$

चूंकि x के किसी भी मान के लिये अचर राशि में कोई परिवर्तन नहीं हो सकता है

अतः II. $$y+\delta y=c$$

III. $$\delta y=c-c$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{c-c}{\delta x}$$

V. $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{c-c}{\delta x}=0$$

या $$\frac{dy}{dx}=0$$

अर्थात् $$\boxed{\frac{d}{dx}(c)=0}$$

अतः अचर राशि का अवकल गुणांक $=0$

8·1. एक अचर राशि और किसी फलन के गुणनफल का अवकल गुणांक-

मान लो a कोई अचर तथा $f(x)$, x का कोई फलन है। तब इनः गुणनफल $=af(x)$

I. माना $y = af(x)$

II. $y + \delta y = af(x + \delta x)$

III. $\delta y = af(x + \delta x) - af(x)$

$= a[f(x + \delta x) - f(x)]$

IV. $\dfrac{\delta y}{\delta x} = a\left[\dfrac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}\right]$

V. $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x \to 0} a\left[\dfrac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}\right]$

या $\dfrac{dy}{dx} = a.\dfrac{d}{dx}f(x)$ (अनु. 7·0 से)

अर्थात $\dfrac{d}{dx}\left[a.f(x)\right] = a.\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right] = a\ f'(x)$

अतः (अचर राशि × फलन) का अवकल गुणांक =

अचर राशि × फलन का अवकल गुणांक

8·2. फलनों के योग अथवा अन्तर का अवकल गुणांक—

माना कि फलन $f(x)$, x का ऐसा फलन है जो फलन $u, v, w, \ldots$ के योगफल के बराबर है जहाँ $u, v, w, \ldots$ सभी x के फलन हैं तथा जिनका पृथक पृथक् अवकल गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

I. माना कि $y = u + v + w + \ldots$

अब मान लो कि x के मान में अत्यल्प वृद्धि δx है और तदनुसार $\delta u, \delta v, \delta w, \ldots, \delta y$ क्रमशः $u, v, w, \ldots y$ के मान में अत्यल्प वृद्धि है जिनका मान भिन्न-भिन्न होते हुए भी अत्यल्प राशि (Infinitesimals) होने के कारण शून्य की ओर अग्रसर होता है।

अर्थात् जब $\delta x \to 0$, तब $\delta u \to 0, \delta v \to 0, \ldots, \delta y \to 0$,

II. इस प्रकार $y + \delta y = (u + \delta u) + (v + \delta v) + (w + \delta w) + \ldots$

III. $\delta y = \delta u + \delta v + \delta w + \ldots$

IV. $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x \to 0}\left[\dfrac{\delta u}{\delta x} + \dfrac{\delta v}{\delta x} + \dfrac{\delta w}{\delta x} + \ldots\right]$

$$V. \therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta v}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta w}{\delta x} + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots$$

या

$$\text{अतः} \quad \frac{d}{dx}\left(u+v+w+\ldots \right) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots$$

अतः फलनों के बीजीय योगफल का अवकल गुणांक, इन फलनों के अवकल गुणांकों के बीजीय योग के बराबर होता है।

टिप्पणी—यदि विभिन्न फलन + अथवा — चिह्नों से सम्बन्धित हों, सम्पूर्ण फलन का अवकल गुणांक प्रत्येक फलन के अलग अलग अवकल गुण को उचित चिह्न सहित रखकर तथा योग करने पर प्राप्त होता है।

$$\frac{d}{dx}\left(u \pm v \pm w \pm \ldots \right) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots$$

8·3. दो फलनों के गुणनफल का अवकल गुणांक—

मान लो $y = f(x) = u \times v$, तब

$$y = u \times v$$

I. $$y + \delta y = (u + \delta u) \times (v + \delta v)$$

II. $$\delta y = (u + \delta u) \times (v + \delta v) - u.v$$

III. $$= u\delta v + v\delta u + \delta u . \delta v$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u . \delta v}{\delta x}$$

V. $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} u.\frac{\delta v}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} v.\frac{\delta u}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta}{}$$

$\because$ δx की तुलना में $\delta u . \delta v$ शून्य की ओर पहले अग्रसर होता है

$$\text{अतः} \quad \frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

अर्थात् $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$

अत: दो फलनों के गुणनफल का अवकल गुणांक

= (प्रथम फलन) × (द्वितीय फलन का अवकल गुणांक)
+ (द्वितीय फलन) × (प्रथम फलन का अवकल गुणांक)

टिप्पणी—दो फलनों में से किसी एक को प्रथम फलन माना जा सकता है।

व्यापकीकरण—उपरोक्त परिणाम से दो से अधिक फलनों के गुणनफल का अवकल गुणांक भी निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\frac{d}{dx}(u.v.w\ z....) = (v.w\ z....)\frac{du}{dx} + (u\ w.z....)\frac{dv}{dx} + (u\ v.z\ ...)\frac{dw}{dz} + ...$$

नियम—प्रथम फलन के अवकल गुणांक से शेष सभी फलनों के गुणनफल को गुणा कर दें। फिर द्वितीय फलन के अवकल गुणांक से शेष सभी फलनों के गुणनफल को गुणा कर दें। इस प्रकार एक-एक करके सभी फलनों के अवकल गुणांकों को शेष फलनों के गुणनफल से गुणा करते जायें तथा इन पदों के बीच योग (+) का चिन्ह रखते जायें तो अभीष्ट अवकल गुणांक ज्ञात हो जायेगा।

8.4. दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक—   [राज., 65]

मान लो $f(x) = \frac{u}{v}$ तब

I. $y = \frac{u}{v}$

II $y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}$

III. $$\delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u+\delta u)v - u(v+\delta v)}{v(v+\delta v)}$$

$$= \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v+\delta v)}$$

IV. $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v+\delta v)}$$

V. $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v+\delta v)}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

अर्थात् $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

अतः दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक

$$= \frac{\text{हर} \times \text{अंश का अवकल गुणांक} - \text{अंश} \times \text{हर का अवकल, गुणांक}}{\text{हर का वर्ग}}$$

टिप्पणी—ऊपर दिये हुए अनुच्छेदों में प्रतिपादित परिणामों से स्पष्ट है कि किसी भी फलन का, जो एक बीजीय संयोजन हो (अर्थात् किन्ही अन्य फलनों से योग, व्यवकलन गुणा या भाजन की संक्रियाओं से प्राप्त होता हो) अवकलज स्वयं भी इन अन्य फलनों के अवकलजों के एक बीजीय संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. निम्न फलन का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये

$$4x^3 + 3x^2 - 5x + 6$$

क्रिया : माना $y = f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 6$

तब $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(4x^3\right)+\dfrac{d}{dx}\left(3x^2\right)-\dfrac{d}{dx}\left(5x\right)+\dfrac{d}{dx}(6)$

$=4\times3x^2+3\times2x-5\times1+0$

$=12x^2+6x-5$ उत्तर

उदाहरण 2 निम्न फलन का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये

$$(2x^2+3x+4)\ (x^3+5x^2+3x)$$

क्रिया : माना $y=(2x^2+3x+4)\ (x^3+5x^2+3x)$

तब $\dfrac{dy}{dx}=\left(x^3+5x^2+3x\right)\dfrac{d}{dx}\left(2x^2+3x+4\right)$

$+\left(2x^2+3x+4\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^3+5x^2+3x\right)$

$=(x^3+5x^2+3x)\ (4x+3)$

$+(2x^2+3x+4)\ (3x^2+10x+3)$ उत्तर

उदाहरण 3. निम्न फलन का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए—

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

क्रिया : माना $y=\dfrac{x+3}{x^2+1}$

तब $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}(x+3)-(x+3)\dfrac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{(x^2+1)\ 1-(x+3)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{1-6x-x^2}{(x^2+1)^2}$

प्रश्नावली 8 (a)

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये—

1. x^{8} ; x^{-3} ; $\frac{1}{x^{1}}$
2. $x^{\frac{3}{5}}$; $x^{-\frac{2}{3}}$; $x^{\frac{2}{7}}$
3. $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x^{5}}$; $\sqrt{x^{-8}}$
4. $3x^{7}$; $5x^{-4}$; $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
5. $3x^2+7x+5$
6. $9x^4+3x^2+7x+4$
7. ax^3+bx^2+cx+d
8. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots$
9. यदि $y=t^{\frac{4}{3}}-3t^{-\frac{2}{3}}+5t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ तो $\frac{dy}{dt}$ ज्ञात कीजिए।
10. यदि $f(x)=ax^{m}+bx^{n}+cx^{p}$, तो $f'(x)$ ज्ञात कीजिए।

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए—

11. $(x+1)(2x+3)$
12. $(3x+4)(x-1)$
13. $(3x^2+5)(9x-4)$
14. $(x^2-a^2)(x^2+a^2)$
15. $(x^4+3x^3)(4x+7x^2)(x^2-2)$
16. $(3x+4)(x-1)(2x+7)$
17. $(3x^3-7x^2-4x)(x-1)(x^2-4x)$
18. $(x^2-a^2)(x^2+2ax+5)(x^2+a^2)$
19. $\frac{2+x}{2-x}$
20. $\frac{a+2x}{a-2x}$

21. $\dfrac{x^2+2x+9}{3x+5}$

22. $\dfrac{3x^2+4x+5}{2x^2+7x+4}$

23. $\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$

24. $\dfrac{a+bx+cx^2}{x^3}$

25. $\dfrac{cx^3+dx+e}{\sqrt{x}}$

विविध दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. $\dfrac{e^x+\tan x}{\cot x-x^n}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करो।

[राज; 61]

क्रिया : माना $y=\dfrac{e^x+\tan x}{\cot x-x^n}$

अनु० 8·4 का सम्प्रयोग करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cot x-x^n)\frac{d}{dx}(e^x+\tan x)-(e^x+\tan x)\frac{d}{dx}(\cot x-x^n)}{(\cot x-x^n)^2}$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cot x-x^n)(e^x+\sec^2 x)-(e^x+\tan x)(-\operatorname{cosec}^2 x-nx^{n-1})}{(\cot x-x^n)^2}$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cot x-x^n)(e^x+\sec^2 x)+(e^x+\tan x)(\operatorname{cosec}^2 x+nx^{n-1})}{(\cot x-x^n)^2}$$

उदाहरण 2. $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करो।

[राज; 57, 60]

क्रिया : माना $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

फलन को करणीरहित करने पर

$$y=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\times\sqrt{\frac{1-\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$=\operatorname{cosec} x-\cot x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec} x\cot x+\operatorname{cosec}^2 x$$

$$=\operatorname{cosec} x\,[\operatorname{cosec} x-\cot x]$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{1+\cos x}$$

उदाहरण 3. यदि $y=\dfrac{x}{x+5}$, तो सिद्ध करो कि

$$x\frac{dy}{dx}=y(1-y)$$

क्रिया : दिये हुए फलन में x को y के फलन के रूप में रखने पर

$$x=\frac{5y}{1-y} \quad \text{....(1)}$$

अनु० 8·4 का सम्प्रयोग करने पर $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{(1-y)\,5-5y\,(-1)}{(1-y)^2}$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\frac{5}{(1-y)^2}$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-y)^2}{5}$$

या $$x\frac{dy}{dx}=\frac{x}{5}\cdot(1-y)^2=\frac{y}{1-y}(1-y)^2 \quad \text{....[(1) से]}$$

$$=y\,(1-y)$$

प्रश्नावली 8 (b)

निम्न लिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करो—

1. $\cot x.\,(7x^4-5x+2)$ [राज० बोर्ड, 73]

2. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ [राज; 61]

3. $\frac{x}{a^2+x^2}$ 4. $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

5. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$ [राज , 53]

6. $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ [राज , 56]

7. $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$ [राज., 59]

8. $\frac{e^x}{1+x^2}$ [राज., 50] 9. $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ [राज., 55]

10. $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 11. $\frac{1-\tan x}{\sec x}$ [राज., 56]

12. $\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x+\cos x}$ [विक्रम, 62] 13. $\frac{2^x . \cot x}{\sqrt{x}}$ [राज., 60]

14. $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ [राज बोर्ड; 73] 15. $\frac{\tan x}{\sec x+\tan x}$

16. निम्न फलनों का अनु० 8·4 की सहायता से x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करो—

(a) $\tan x$ (b $\cot x$ (c) $\sec x$ (d) $\operatorname{cosec} x$

*8 5. फलन का फलन (Function of a function)

अभी तक हमने केवल ऐसे फलनों पर विचार किया है जिनमें परतन्त्र तथा स्वतन्त्र चर राशि के बीच सीधा सम्बन्ध था। अब ऐसे फलनों पर विचार करेंगे जिनमें परतन्त्र और स्वतन्त्र चर राशियों का सम्बन्ध कुछ अन्य मध्यवर्ती फलनों द्वारा होता है।

$y=e^{\sin x}$, यहाँ y, $\sin x$ पर निर्भर है तथा $\sin x$, x पर निर्भर करता है इस प्रकार y, $\sin x$ का फलन है तथा $\sin x$ स्वयं, x का फलन है।

इस प्रकार y, एक फलन का फलन है

$y=\sin^2(a^2+x^2)$, यहां y का मान $\sin(a^2+x^2)$ पर निर्भर करता है तथा $\sin(a^2+x^2)$ का मान (a^2+x^2) पर निर्भर करता है जो स्वयं x^2 पर और फिर x^2, x पर निर्भर करता है। इस प्रकार y का x के साथ सीधा सम्बन्ध न होकर मध्य के तीन फलनों के द्वारा है। अर्थात् y, एक फलन के फलन का फलन है।

ये सभी फलन कड़ी chain) की तरह एक दूसरे में सम्बन्धित रहते है।

फलन के फलन का अवकल गुणांक—

माना $y=f(u)$ तथा $u=\phi(x)$ अर्थात् y, u का फलन है और u स्वयं x का फलन है।

मान लो स्वतन्त्र चर राशि x में वृद्धि δx के संगत u में वृद्धि δu है और चर u में वृद्धि δu के संगत y में वृद्धि δy है। यदि $\delta u \neq 0$ तो बीज गणित से

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta y}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}$$

अब यदि $\delta x \to 0$, तो $\delta u \to 0$ और $\delta y \to 0$, तो

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta u}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x}=\lim_{\delta u\to 0}\frac{\delta y}{\delta u}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x}$$

या
$$\boxed{\frac{y}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

व्यापकीकरण—यदि $y=f(u)$, $u=\phi(v)$, $v=\psi(w)$, $w=\theta(x)$, तो

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. $\cos x^3$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिये।

क्रिया : माना $y=\cos x^3$ और $z=x^3$ तो $y=\cos z$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

अब $\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dz}(\cos z)=-\sin z$

और $\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\sin z.\ 3x^2=-3x^2\sin z$

z का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{dy}{dx}=-3x^2\sin x^3$$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $y=(3x^2+5x+2)^3$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

क्रिया : माना $y=(3x^2+5x+2)^3$

पुनः यदि $z=3x^2+5x+2$

तब $y=z^3$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\ \frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{d}{dz}\left(z^3\right).\ \frac{d}{dx}\left(\ 3x^2+5x+2\ \right)$$

$$=3z^2\ (6x+5)$$

$$=3(6x+5)\ (3x^2+5x+2)^2$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $y=\cos\ (\tan x^3)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

क्रिया : यहाँ $y=\cos\ (\tan x^3)$ अतः y, $\tan x^3$ का फलन है और वह x^3 का फलन है जो स्वयं x का फलन है।

माना $u=\tan x^3$ और $z=x^3$

तब $y=\cos u,\ u=\tan z$ और $z=x^3$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\cos u\right)\frac{d}{dz}\left(\tan z\right)\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$$
$$=-\sin u.\ \sec^2 z.\ 3x^2$$

u तथा z का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(\tan x^3).\ \sec^2 x^3.\ 3x^2$$
$$=-3x^2\sec^2 x^3\sin(\tan x^3)$$

उदाहरण 4. $\frac{2}{\pi}\sin x^\circ$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करो।

[राज., 62]

क्रिया : माना $y=\frac{2}{\pi}\sin x^\circ$

सर्वप्रथम x° को वृत्तीय प्रणाली में परिवर्तित करना चाहिये।

$\because\ 180^\circ=\pi$ radians

$\therefore\ 1^\circ=\frac{\pi}{180}$ radians

$\therefore\ x^\circ=\frac{\pi}{180}\cdot x$ radians

अतः $y=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{180}$

या $y=\frac{2}{\pi}\sin z$ जहाँ $z=\frac{\pi x}{180}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\pi}\cdot\cos z.\frac{\pi}{180}$ $\left[\because \frac{dz}{dx}=\frac{\pi}{180}\right]$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{90}\cos\frac{\pi x}{180}=\frac{1}{90}\cos x^\circ$

उदाहरण 5. $\sin \log (1+x^2)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। [राज., 70, 71]

क्रिया : माना $\quad y=\sin \log (1+x^2)$

$\log (1+x^2)=z$ तथा $(1+x^2)=t$ लेने पर

$$y=\sin z;\ z=\log t;\ t=1+x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\cos z.\frac{1}{t}.\ 2x$$

$$=\cos \log (1+x^2).\frac{1}{1+x^2}.\ 2x$$

$$=\frac{2x}{1+x^2}\cos \log (1+x^2)$$

उदाहरण 6. $\log (x+\sqrt{x^2+a^2})$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। [राज; 59, 50, 67]

क्रिया : माना $\quad y=\log (x+\sqrt{x^2+a^2})$

$(x+\sqrt{x^2+a^2})=z$ तथा $\sqrt{x^2+a^2}=t$ लेने पर

$$y=\log z,\ z=x+t,\ t=\sqrt{x^2+a^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

या $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{dt}{dx}\right)$

या $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{z}.\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

या $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

या $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

उदाहरण 7. $\log \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। [राज., 64,66,68]

क्रिया : माना $y=\log \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$z=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ और $t=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ लेने पर

$y=\log z;\ z=\tan t;\ t=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot \sec^2 t\cdot\frac{1}{2}$$

z और t का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{1}{\cos x}=\sec x$$

*8·6. $e^{ax}\sin(bx+c)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक [राज; 54, 59]

माना $y=e^{ax}\sin(bx+c)$

तब $\frac{dy}{dx}=e^{ax}\frac{d}{dx}\sin(bx+c)+\sin(bx+c).\frac{d}{dx}e^{ax}$

या $\frac{dy}{dx}=e^{ax}\cos(bx+c).\ b+\sin(bx+c)e^{ax}.\ a$

या $\frac{dy}{dx}=e^{ax}[b\cos(bx+c)+a\sin(bx+c)]$

विशेष अवस्था : यदि $c=0$, तो

$$\frac{dy}{dx}=e^{ax}[a\sin bx+b\cos bx] \quad ....(1)$$

स्मरण के लिए (1) को निम्न संक्षेप रूप में इस प्रकार रखते हैं—

यदि $a=r\cos\phi$, $b=r\sin\phi$ लें तो $r=\sqrt{a^2+b^2}$ तथा $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=e^{ax}r(\sin bx\cos\phi+\cos bx\sin\phi)$

अतः $\frac{dy}{dx}=e^{ax}r\sin(bx+\phi)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^{ax}\sin bx)=\sqrt{a^2+b^2}.\ e^{ax}\sin\left(bx+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}$$

ी प्रकार $\boxed{\frac{d}{dx}(e^{ax}\cos bx)=\sqrt{a^2+b^2}.\ e^{ax}\cos\left(bx+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}$

दाहरणार्थ $y=e^{x}\sin(\sqrt{3}x)$

यहाँ $a=1$ तथा $b=\sqrt{3}$

अतः $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+3}\,e^{x}\sin\left\{\sqrt{3}x+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\right\}$

$=2e^{x}\sin\left\{\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3}\right\}$

प्रश्नावली 8 (c)

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करो—

1. $\log \tan x$; $\log(3x+4)$; $\tan \log x$
2. e^{-5x}; $e^{2x} - \sin x$; $x^3 e^{2x}$
3. $e^{\sin 2x}$; $ae^x + b\sin x$; $e^{\tan x}$
4. $\sqrt{\cos x}$; $\cos\sqrt{x}$; $\sqrt{\cos\sqrt{x}}$
5. $\log \sin x$; $\sin \log x$
6. $\sec^2(e^{-x})$
7. $e^{5\log x} + e^{\sin \log_e x}$
8. $\sqrt{\log_e x} + \log_e \sqrt{}$ ..
9. $\operatorname{cosec}^n x + \sec^n x$
10. $a^x \cos bx$
11. $\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ [विक्रम., 65]
12. $\dfrac{(2x-1)^2}{(3x+2)^3}$ [राज; 51]
13. $\sqrt{\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-p)(x-q)}}$ [राज;55]
14. $\sqrt{a^2+x^2}$
15. $a^{\tan 5x}$ [राज; 53]
16. $5^{\log \sin x}$ [राज; 56]
17. $e^{\sqrt{\sin x}}$ [विक्रम; 65]
18. $e^{\sqrt{\cot x}}$
19. $e^x \cos x$ [राज; 66]
20. $e^{\sqrt{3}x}\sin(-x)$
21. $e^{3x}\cos 4x$
22. $e^{4x}\cos(2x+7)$ [राज; 5
23. $\sec^2 \dfrac{x}{a}$ [राज; 51]
24. $\sin x^{\circ}$
25. $\cos^3 ax \,.\, e^{\tan x}$ [राज; 52]
26. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$ [राज;
27. $\log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
28. $\log(\sec x + \tan x)$ [विक्रम

29. $\log \sin (1+x^2)$ 30. $\log \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ [राज., 65]

31. $\sec x \tan x+\log \tan \left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$ [राज., 59]

32. $\log \frac{a+b \tan x}{a-b \tan x}$ [राज., 59] 33. $\log \sqrt{\sin e^x}$ [राज, 58]

34. $\log \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 35. $\log \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [राज., 52]

36. $(\cos \sqrt{x}) \log (\sin x)$ [राज., 53] 37. $\log (x+\sqrt{x^2-a^2})$ [राज., 60]

38. $\tan x + \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ [राज., 58]

प्रश्नावली 8 (d)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1 यदि $y=uvw$, जहाँ u, v तथा w तीनों x के फलन है, तो $\frac{dy}{dx}$ निम्न के तुल्य होगा—

(A) $u\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dw}{dx}+v\frac{du}{dx} \cdot \frac{dw}{dx}+w\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$

(B) $uv\frac{dw}{dx}+uw\frac{dv}{dx}+vw\frac{du}{dx}+uvw$

(C) $uv\frac{dw}{dx}+uw\frac{dv}{dx}+vw\frac{du}{dx}+\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dw}{dx}$

(D) $uv\frac{dw}{dx}+uw\frac{dv}{dx}+vw\frac{du}{dx}$ ( )

2. यदि $y = \frac{u}{v}$, जहाँ u तथा v, x के फलन है, तो $\frac{dy}{dx}$ निम्न के तुल्य होगा—

(A) $\frac{1}{v^2}\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)$ (B) $\frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)$

(C) $\frac{1}{v}\left(v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\right)$ (D) $\frac{v\frac{du}{dx}}{u\frac{dv}{dx}}$ (　　)

3. $\sin x^2$ का अवकल गुणांक होगा—

(A) $\cos 2x$ (B) $-2x\cos x^2$

(C) $2x\cos x^2$ (D) $\sin 2x$ (　　)

4. $\tan\sqrt{x}$ का अवकल गुणांक होगा—

(A) $\frac{1}{2}\sec^2 x$ (B) $\frac{1}{2}\sec^2\sqrt{x}$

(C) $\sec^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$ (D) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x}$ (　　)

5. $\cos x^\circ$ का अवकल गुणांक होगा—

(A) $\sin x^\circ$ (B) $-\frac{\pi}{180}\sin x^\circ$

(C) $-\sin x^\circ$ (D) $\frac{180}{\pi}\sin x^\circ$ (　　)

6. $\sin^2\log x$ का अवकल गुणांक लिखो।

(....................................)

7. $\sec e^{\frac{x}{a}}$ का अवकल गुणांक लिखो। (....................................)

8. $\log\sin x^2$ का अवकल गुणांक लिखो।

(....................................)

9

अवकलन (क्रमशः)
(Differentiation contd.)

9·0. लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)—

जब फलन $[f(x)]^{\phi(x)}$ रूप के हों तो, अभी तक बतलाई विधियों से इनका अवकलन नहीं किया जा सकता। ऐसे फलनों का अवकलन करने के लिये हम सर्व प्रथम फलनों का लघुगणक (logarithms) लेते हैं। और फिर इससे प्राप्त परिणाम का अवकलन करते हैं। अतः इस विधि को लघुगणकीय अवकलन कहते हैं। यह निम्न क्रिया से स्पष्ट हो जायेगी।

माना $y=u^{v}$, जहाँ u तथा v, x के फलन हैं।

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log_e y=v \log_e u$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\cdot \frac{dy}{dx}=v\left(\frac{1}{u}\cdot \frac{du}{dx}\right)+(\log_e u)\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=y\left\{\frac{v}{u}\cdot \frac{du}{dx}+\log_e u\cdot\frac{dv}{dx}\right\}$$

$$=u^{v}\left\{\frac{v}{u}\cdot \frac{du}{dx}+\log_e u\,\frac{dv}{dx}\right\}$$

टिप्पणी—जब किसी चर राशि की घात (power) कोई चर राशि हो या दिया हुआ फलन हो या कई फलनों का गुणनफल हो, तो उपरोक्त विधि बहुत उपयोगी होती है।

सावधान (caution) $y = x^x + (\sin x)^x + x^{\log x}$ प्रकार के फलनों में सीधा लघुगणक लेना सम्भव नहीं है। जबकि कभी-कभी छात्र असावधानी से निम्न प्रकार लिख लेते हैं—

$$\log y = x \log x + x \log \sin x + \log x . \log x$$

जो कि नितान्त गलत है क्योंकि $\log (a+b) \neq \log a + \log b$

ऐसे फलनों में विविध पदों का अवकल गुणाक अलग-अलग ज्ञात करना पड़ता है। यह निम्न दृष्टान्तीय उदाहरणों से और अधिक स्पष्ट हो जायेगा।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. x के सापेक्ष $x^a + a^x + x^x$ का अवकल गुणांक ज्ञात करो।
[राज., 61]

क्रिया : माना $y = x^a + a^x + x^x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^a) + \frac{d}{dx}(a^x) + \frac{d}{dx}(x^x)$$

$$= ax^{a-1} + a^x \log a + \frac{d}{dx}(x^x) \qquad \ldots\ldots(1)$$

अब हम x^x का अवकल गुणांक उपरोक्त विधि से ज्ञात करेंगे।

$$\text{माना} \quad z = x^x$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log z = x \log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{z} . \frac{dz}{dx} = x . \frac{1}{x} + 1 . \log x$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = z (1 + \log x)$$

$$= x^x (1 + \log x)$$

अतः $\frac{dy}{dx} = ax^{a-1} + a^x \log a + x^x(1+\log x)$

$$= ax^{a-1} + a^x \log a + x^x \log ex \ [\because 1+\log x = \log ex]$$

उदाहरण 2. x^{x^x} का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करो।

क्रिया : माना $y = x^{x^x}$

$$\log y = x^x \log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x^x \cdot \frac{1}{x} + \log x \frac{d}{dx}\left(x^x\right)$$

या $$\frac{dy}{dx} = x^{x^x}\left[x^{x-1} + \log x \cdot x^x\left(1+\log x\right)\right] \text{(उदा. 1 से)}$$

$$= x^{x^x} \cdot x^{x-1}\left[1 + x\log x\,(1+\log x)\right]$$

उदाहरण 3. $(1+\cos x)^x$ का x के सापेक्ष अवकलन करो।

[राज; 51, 59, 64]

क्रिया : माना $y = (1+\cos x)^x$

लघुगणक लेने पर $\log y = x \log(1+\cos x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{1+\cos x} \cdot (-\sin x) + \log(1+\cos x).$$

या $$\frac{dy}{dx} = (1+\cos x)^x \left[\frac{-x\sin x}{1+\cos x} + \log(1+\cos x)\right]$$

उदाहरण 4. x के सापेक्ष $x^{\log x} + (\sin x)^x$ का अवकलन करो।

[राज; 54, 68]

क्रिया : माना $y = x^{\log x} + (\sin x)^x$

पुनः माना $u = x^{\log x}$ तथा $v = (\sin x)^x$

$\log u = \log x . \log x$

$\frac{1}{u} . \frac{du}{dx} = \log x . \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \log x$

$\therefore \frac{du}{dx} = u \left(\frac{2}{x} \log x \right)$

या $\frac{du}{dx} = 2x^{\log x - 1} \log x$ ....(1)

$\log v = x \log \sin x$

$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = x . \frac{1}{\sin x .} \cos x + \log \sin$

$\therefore \frac{dv}{dx} = v(x \cot x + \log \sin x)$

या $\frac{dv}{dx} = (\sin x)^x \times (x \cot x + \log \sin x)$ ... (2)

अव दिया हुआ फलन $y = u + v$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{ax} + \frac{dv}{dx}$

या $\frac{dy}{dx} = 2x^{\log x - 1} \log x + (\sin x)^x (x \cot x + \log \sin$

[(1) और (2)

उदाहरण 5. $x^3 e^x \sin^2 x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करो ।

क्रिया : माना $y = x^3 e^x \sin^2 x$

$\log y = \log x^3 + \log e^x + \log \sin^2 x$

[$\because \log ab = \log a + \log b$

$= 3 \log x + x + 2 \log \sin x$

[$\because \log_e e^x = x \log_e e = x.$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x}+1+2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

अतः $\frac{dy}{dx}=x^3e^x\sin^2 x\left[\frac{3}{x}+1+2\cot x\right]$

या $\frac{dy}{dx}=x^2e^x\sin x\ (3\sin x+x\sin x+2x\cos x)$

प्रश्नावली 9 (a)

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणाक ज्ञात करो—

1. x^x ; $x^{\cot ax}$
2. $(\log x)^x$; $x^{\sin^{-1}x}$
3. 5^{x^2+3x+4}
4. $(\sin x)^{\cos x}$; $(\cos x)^{\log x}$
5. $(\log x)^{\sin x}$; $(\sin^{-1}x)^{\log x}$
6. $(\cot x)^{\sin x}+(\tan x)^{\log x}$ [अजमेर बोर्ड, 53]
7. x^{x^2}
8. $(1+x)^x$
9. $(\sin x)^x$ [राज., 50]
10. $(\sin x)^{\log x}$ [राज., 70]
11. $3^{x\log x}$ [राज., 66]
12. e^{x^x}
13. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ [राज., 52, 53]
14. $x^x+x^{\frac{1}{x}}$ [राज बोर्ड., 57, 59]
15. $x^x+(\sin x)^x$ [राज., 68]
16. $(\sin x)^x+x^{\sin x}$ [राज., 67]
17. $\sqrt{\frac{(1+x)(2+x)}{(1-x)(2-x)}}$ [राज., बोर्ड 58]
18. $\sqrt{\frac{(x-a)(x-b)}{(x-p)(x-q)}}$

[राज., 51

$c^2\sqrt{x}\,e^{2x}$ [राज. बोर्ड, 5

). $e^{\cot x}\cos^3 ax$

22. $e^{x^2}\sec^2 x$

1. $xe^x \sin x$

23. $\sin x. \sin 2x. \sin 3x. \sin 4x$

24. $\tan x \times \log x \times e^x \times x^x \times \sqrt{x}$

9·1. अस्पष्ट (Implicit) फलनों का अवकलन

(i) **स्पष्ट फलन** (Explicit function)—यदि किसी समीकरण में x तथा y दोनों हो और इसमें y को x के (या x को y के) फलन के रूप में स्पष्ट रूप से व्यक्त किया जा सके तो y को x का (या x को y का) स्पष्ट फलन कहते हैं। इस प्रकार के अर्थात् $y=f(x)$ [या $x=f(y)$] रूप वाले फलनों का अवकलन कर चुके हैं।

(ii) **अस्पष्ट फलन** (Implicit function)—यदि किसी समीकरण में x तथा y दोनों मिले जुले आते हों अर्थात् $f(x\,y)=0$, और यह फलन y (अथवा x) के लिए स्पष्टतया हल न किया जा सके तो y को x का (या x को y का) अस्पष्ट फलन कहते हैं। ऐसे फलनों $f(x, y)=0$ के अवकलन की क्रिया विधि (working rule) निम्न हैं—

1. y को x का फलन मानकर $f(x,y)=0$ के प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करो।

2. $\frac{dy}{dx}$ के गुणांकों को एकत्रित करके $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

[राज., 55

$\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

क्रिया : $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2ax+2hy+2hx\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}=0$$

या $\frac{dy}{dx}(hx+by+f)=-(ax+hy+g)$

या $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$

उदाहरण 2 यदि $x^y=y^x$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

[राज., बोर्ड, 56]

क्रिया : $x^y=y^x$

लघुगणक लेने पर $y\log x=x\log y$

अब दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{y}{x}+\frac{dy}{dx}\log x=\log y+\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

या $\frac{dy}{dx}\left[\log x-\frac{x}{y}\right]=\log y-\frac{y}{x}$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$

उदाहरण 3. यदि $x^y=e^{x-y}$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$ [राज, 56, 70]

क्रिया : दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$y\log x=x-y$ $[\because \log_e e=1]$

या $$y=\frac{x}{1+\log x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{(1+\log x).1-x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

उदाहरण 4. यदि $(\cos x)^y=(\sin y)^x$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो ।

[राज; 60]

क्रिया : $(\cos x)^y=(\sin y)^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$y \log \cos x = x \log \sin y$$

$$y(-\tan x)+\log \cos x \frac{dy}{dx}=x \cot y \frac{dy}{dx}+\log \sin y$$

अत: $$\frac{dy}{dx}\left[\log \cos x - x \cot y\right]=\log \sin y + y \tan x$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{\log \sin y + y \tan x}{\log \cos x - x \cot y}$$

उदाहरण 5. यदि $\sin y = x \sin (a+y)$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

[राज; 61, 70 S]

क्रिया : यहाँ $x=\frac{\sin y}{\sin (a+y)}$

दोनों पक्षों का y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sin (a+y) \cos y - \sin y \cos (a+y)}{\sin^2 (a+y)}$$

$$=\frac{\sin (a+y-y)}{\sin^2 (a+y)}=\frac{\sin a}{\sin^2 (a+y)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

उदाहरण 6. यदि $y=x^{x^{x\cdots \text{अनन्त तक}}}$, तो सिद्ध करो कि

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-y\log x}$$ [राज, 50]

क्रिया : माना $y=x^{x^{x\cdots\infty}}$

तो $y=x^y$

$\log y=y\log x$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx}\left[\frac{1}{y}-\log x\right]=\frac{y}{x}$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{1-y\log x}$

या $x\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-y\log x}$

प्रश्नावली 9 (b)

$\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो, जब

1. $xy=c^2$
2. $x^2+y^2+2x-4y=0$
3. $x^3+y^3+3axy=0$ [राज., 67]
4. $x^5+y^5+5xy-4=0$ [राज., 64]
5. $x=y\log xy$
6. $y=x^y$ [राज., 63]
7. $x^y+y^x=2$ [राज., 59]
8. $x^y+y^x=a$ [राज, 61]
9. $\tan y=\log x$
10. यदि $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ तो सिद्ध करो कि $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+y=0$

11. यदि $y=\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\cdots\text{अनन्त तक}}}}$, तो सिद्ध करो कि

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{2-y\log x}$$

12. यदि $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\text{अनन्त तक}}}}$,

तो सिद्ध करो कि $(2y-1)\frac{dy}{dx}=1$

13. यदि $y=(\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)^{\cdots\text{अनन्त तक}}}}$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\cot x}{1-y\log\sin x}$$

14. यदि $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\cdots\text{अनन्त तक}}}}$

तो सिद्ध करो कि $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$ [राज., 62]

9.3. प्राचलिक समीकरण (Parametric equations)

प्राचल (Parameter) जब x और y दोनों किसी तीसरी चर राशि के पदों में दिये हो, जैसे $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$,

तो उस तीसरी राशि को **प्राचल** कहते हैं। तथा इस प्रकार के समीकरण **प्राचलिक समीकरण** कहलाते हैं।

ऐसे समीकरणों में $\frac{dy}{dx}$ का मान उनमें प्रयुक्त प्राचल का विलोप (Eliminate) कर अवकलन करने से प्राप्त किया जा सकता है। किन्तु कभी-कभी विलोपन कठिन होता है तब ऐसी स्थिति में हम dy/dx का मान जब 't' प्राचल हो तो निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं—

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

अतः x के सापेक्ष y का अवकल गुणांक, प्राचल के सापेक्ष y और x के अवकल गुणांकों का भागफल होता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$,

तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो [राज; 64, 67]

क्रिया : $x=a(\theta+\sin\theta)$

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1+\cos\theta)$$

$y=a(1-\cos\theta)$

$$\frac{dy}{d\theta}=a.\sin\theta$$

अतः $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}$

उदाहरण 2. यदि $x=\log t+\sin t$, $y=e^t+\cos t$,

तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो [राज; 68]

क्रिया : $x=\log t+\sin t$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}+\cos t$$

$y=e^t+\cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=e^t-\sin t$$

अतः $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e^t-\sin t}{1/t+\cos t}$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{t(e^t-\sin t)}{1+t\cos t}$

प्रश्नावली 9 (c)

$\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो, जब

1. $x=at^2$, $y=2at$

2. $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$

3. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$

4. $x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right), y = a \sin t$

5. यदि $x = \frac{3at}{1+t^3}; y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$ [दिल्ली बोर्ड; 70]

प्रश्नावली 9 (d)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. x^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा—

(A) $x\, x^{x-1}$ (B) $x^x \log_e x$

(C) $x^x \log ex$ (D) $x^x \log \frac{e}{x}$ ( )

2. यदि $xy = c^2$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा—

(A) $\frac{c^2}{x^2}$ (B) $\frac{2c-y}{x}$ (C) c^2 (D) $-\frac{y}{x}$ ( )

3. यदि $x = a \cos \theta; y = b \sin \theta$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा—

(A) $\frac{a}{b} \cot \theta$ (B) $\frac{b}{a} \cot \theta$

(C) $\frac{b}{a} \tan \theta$ (D) $-\frac{b}{a} \cot \theta$

4. यदि $x = a \sec \theta$, $y = b \tan \theta$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान लिखो।

(.................)

5. यदि $y = x^y$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान लिखो।

(.................)

10

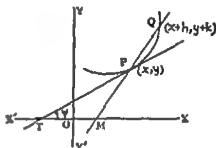
सरल ज्यामितीय प्रयोग
(Simple Geometrical Applications)
Tangents and Normals

10·0. स्पर्श रेखा (Tangent) परिभाषा—

मान लो किसी वक्र $y=f(x)$ पर $P\ (x, y)$ तथा $Q\ (x+h, y+k)$ कोई दो बिन्दु है। P तथा Q को मिलाओ।

जब बिन्दु Q वक्र के अनुगत (along the curve) P की ओर अग्रसर होता है तो सरल रेखा PQ किसी निश्चित रेखा (मान लो PT) की ओर अग्रसर होगी।

"PQ की सीमान्त स्थिति, जब Q→P अर्थात् सरल रेखा PT बिन्दु P पर वक्र की स्पर्श रेखा (tangent) कहलाती है।



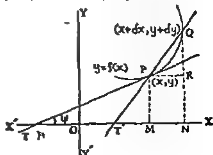
चित्र 40

10·1. अवकल गुणांक $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ का ज्यामितीय अर्थ—

[राज ,52 57(s)59.67]

मान लो किसी वक्र $y=f(x)$ पर $P\ (x, y)$ कोई बिन्दु है तथा इसके बहुत समीप कोई अन्य बिन्दु $Q\ (x+\delta x, y+\delta y)$ है जहाँ δx तथा δy अति लघु है।

Q को P से मिलाकर इस प्रकार बढ़ाओ कि जीवा PQ x-अक्ष को T' पर काटे। P तथा Q बिन्दु से x-अक्ष पर PM तथा QN लम्ब डालो और P से QN पर PR अभिलम्ब डालो।



चित्र 41

$$\text{तब}\ \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{QR}{PR}=\tan QPR$$

$$=\tan PT'X$$

= उस कोण की स्पर्श ज्या (tangent) जो जीवा PQ, x-अक्ष से बनाती है।

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\tan PT'X$$

अब जैसे-जैसे δx शून्य की ओर अग्रसर होता है। Q भी P की ओर अग्रसर होता है। और अन्त में जीवा PQ वक्र के P विन्दु पर स्पर्श रेखा PT बन जाती है। तथा कोण PT′X (जो जीवा PQ, x-अक्ष से बनाती है) कोण PTX (जो स्पर्श रेखा PT, x-अक्ष से बनाती है) के बराबर हो जाता है।

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{Q\to P}\tan PT'X=\tan PTX$$

अर्थात् अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ उस कोण की स्पर्शज्या (trigonometrical tangent) है जो वक्र $y=f(x)$ के किसी बिन्दु (x, y) पर खींची हुई स्पर्श रेखा x-अक्ष की धन दिशा के साथ बनाती है।

साधारणतया यह कोण PTX, ψ से प्रदर्शित किया जाता है।

अतः
$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\tan\psi}$$

उस कोण की स्पर्श ज्या को जो बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा x-अक्ष के साथ बनाती है सामान्यतः "बिन्दु P पर वक्र की प्रवणता (gradient) कहलाती हैं।

10·2. स्पर्श रेखा का समीकरण—

निर्देशांक ज्यामिति से हम जानते हैं कि बिन्दु (x, y) से गुजरने वाली सरल रेखा जिसकी प्रवणता m हो, का समीकरण है—

$$Y-y=m\,(X-x)$$

जहाँ (X, Y) चलित निर्देशांक (current co-ordinates) हैं।

अब स्पर्श रेखा के लिए सामान्य संकेतन में

$$m = \tan \psi = \frac{dy}{dx}$$

अतः वक्र के P (x, y) बिन्दु पर स्पर्श रेखा का अभीष्ट समीकरण होगा—

$$\boxed{Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)}$$

उपप्रमेय 1. यदि वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो तो

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

विलोमत : यदि वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर $\frac{dy}{dx} = 0$ तो उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर होगी।

उपप्रमेय 2. यदि वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर हो तो

$$\frac{dy}{dx} = \infty$$

या

$$\frac{dx}{dy} = 0$$

विलोमत : यदि वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर $\frac{dx}{dy} = 0$, तब उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर होती है।

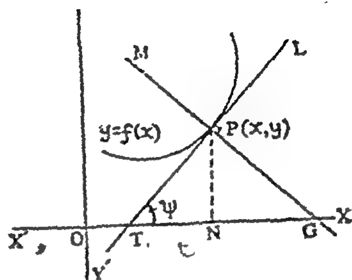
10·3. अभिलम्ब (Normal) परिभाषा—वक्र के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब वह सरल रेखा है, जो उस बिन्दु से गुजरती है तथा वक्र के उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा पर लम्ब है।

अभिलम्ब का समीकरण—

हम जानते हैं कि बिन्दु P (x, y) पर स्पर्श रेखा का झुकाव $m = \frac{dy}{dx}$ है।

अतः बिन्दु (x, y) पर लम्ब रेखा का झुकाव माना

$$m' = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{dx}{dy} \text{ होगा।}$$



चित्र 42

अतः वक्र के बिन्दु P (x, y) पर अभिलम्ब का समीकरण

$$\boxed{Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)}$$

या $(Y - y)\frac{dy}{dx} + (X - x) = 0$

10·4. वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण (Angle of intersection of curves)

मान लो कि दो वक्र C_1 तथा C_2 परस्पर बिन्दु P पर काटते हैं।

दोनों वक्रों पर बिन्दु P पर स्पर्शियाँ खींचो। इन स्पर्शियों के बीच का कोण φ वक्रों का प्रतिच्छेद कोण (Angle of intersection) कहलाता है।

निर्देशांक ज्यामिति से हम जानते हैं कि दो सरल रेखाओं

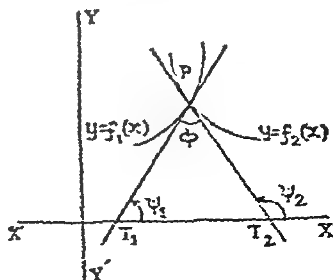
$y = m_1x + c_1$

$y = m_2x + c_2$

के बीच का कोण

$$\theta = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \text{ होता है}$$

or $$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$



चित्र 43

किन्तु m_1 तथा m_2 वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु P (x, y) पर $\frac{dy}{dx}$ के मान

है। अतः यदि हम इनको $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}$ तथा $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}$ से प्रकट करें, तो वक्रों का अभीष्ट प्रतिच्छेदन कोण

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}}}$$

टिप्पणी : दूसरा प्रतिच्छेद कोण $\pi-\theta$ होगा।

लम्ब कोणीय वक्र (Orthogonal curves) जब दो वक्र एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं तो उन वक्रों को लम्ब कोणीय वक्र कहते हैं।

विशेष अवस्था : यदि $\theta=90^\circ$ तब स्पष्टतः

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}=0$$

या
$$\boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}=-1}$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $x^2+2y=8x-7$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो। वक्र के किस बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है।

उन बिन्दुओं पर जिनके लिए $x=3$ और $x=5$, वक्र की प्रवणताएं क्या है ? [राज., 59, 68]

क्रिया : वक्र के समीकरण $x^2+2y=8x-7$ में $x=3$ रखने पर $y=4$ अतः बिन्दु के निर्देशांक (3,4) इसी प्रकार अन्य बिन्दु (5,4)।

वक्र के समीकरण को x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=8$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{4-x}{y}$$

अतः विन्दु (3, 4) पर प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$

और विन्दु (5, 4) पर प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{4-5}{4}=-\frac{1}{4}$

अब स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर होती है यदि $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ 4-x=0$ या $x=4$ तब $y=\frac{9}{2}$

अतः अभीष्ट विन्दु के निर्देशांक $(4, \frac{9}{2})$ है।

उदाहरण 2. वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ पर उन विन्दुओं को ज्ञात करो जहाँ स्पर्श रेखा

(i) x—अक्ष पर लम्ब हो,

(ii) y—अक्ष पर लम्ब हो,

(iii) अक्षों से झुकाव (inclination) बराबर हो। [राज., 64]

क्रिया : दिये हुये वक्र के समीकरण का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y}=\tan\psi \qquad ....(1)$$

(i) स्पर्श रेखा x-अक्ष पर लम्ब होगी यदि $\psi=90^\circ$ अर्थात् $\frac{dy}{dx}=\infty$

अतः $y=0$

$\therefore$ अभीष्ट विन्दु (3,0) ; (−1,0)

(ii) स्पर्श रेखा y-अक्ष पर लम्ब होगी यदि $\psi=0$ अर्थात् $\frac{dy}{dx}=0$

अर्थात् $x=1$

$\therefore$ अभीष्ट विन्दु (1, 2) ; (1, −2)

(*iii*) स्पर्श रेखा x तथा y-अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है अर्थात् $\frac{dy}{dx}=1$

अतः $1-x=y$

$$x^2+(1-x)^2-2x-3=0$$

या $2x^2-4x-2=0$ या $x^2-2x-1=0$

$$\therefore \quad x=1\pm\sqrt{2}$$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु $(1\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$; $(1\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

उदाहरण 3. वक्र $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात करो। [राज; 64, 69, (S), 70]

क्रिया : वक्र के समीकरण का अवकलन करने पर

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{या} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

अतः बिन्दु $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a\cos\theta}{b\sin\theta}=-\frac{b}{a}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

दिये हुये बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y-b\sin\theta=-\frac{b}{a}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-a\cos\theta)$$

या $ay\sin\theta-ab\sin^2\theta=-bx\cos\theta+ab\cos^2\theta$

या $bx\cos\theta+ay\sin\theta=ab$

तथा अभिलम्ब का समीकरण

$$y-b\sin\theta=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(x-a\cos\theta)$$

या $\quad y\, b \cos \theta - b^2 \sin \theta \cos \theta = a\, x \sin \theta - a^2 \sin \theta \cos \theta$

या $\quad a\, x \sin \theta - b\, y \cos \theta = \sin \theta \cos \theta\, (a^2 - b^2)$

या $\quad a\, x \sec \theta - b\, y \operatorname{cosec} \theta = a^2 - b^2$

उदाहरण 4. निम्न वक्रों के प्रतिच्छेद कोण ज्ञात कीजिए—

$$y^2 = x \qquad \text{तथा } x^2 = y$$

क्रिया ; $\qquad y^2 = x \quad ....(1), \qquad x^2 = y \quad ....(2)$

वक्रों के समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर उनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक (0,0) तथा (1,1) प्राप्त होते हैं :

वक्र (1) के लिये $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$

तथा (2) के लिये $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 2x$

I बिन्दु (0,0) पर—

वक्र (1) पर $\qquad \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = \infty$

वक्र (2) पर $\qquad \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = 0$

इस प्रकार हम देखते हैं कि (0, 0) पर वक्र (1) पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्ब तथा (2) पर x-अक्ष के समान्तर है।

अतः (0,0) पर प्रतिच्छेद कोण $= 90°$

II बिन्दु (1,1) पर—

वक्र (1) पर $\qquad \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = \frac{1}{2} = m_1$

वक्र (2) पर $\qquad \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = 2 = m_2$

अतः बिन्दु (1,1) पर कोण

$$\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2.\frac{1}{2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

अतः अभीष्ट कोण 90° तथा $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

प्रश्नावली III (a)

1. वक्र $y=(x-1)(x-2)$ के बिन्दु (1,0) तथा (2,0) पर स्पर्श रेखाओं की प्रवणतायें ज्ञात कीजिए। [राज; बोर्ड 41]

2. निम्नलिखित वक्रो में प्रत्येक के लिये बिन्दु (x,y) पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए—

(a) $x^2+y^2=a^2$ (b) $y^2=4ax$

(c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

3. निम्नलिखित वक्रो में प्रत्येक के लिए उनके सम्मुख अंकित बिन्दु पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात करिए—

(a) $x^2+y^2=a^2, \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$

(b) $y^2=4x; y=4$ पर

4. वक्र $y^2=ax^3+b$ के बिन्दु (2,3) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y=4x-5$ है। a और b के मान ज्ञात करो। [राज;62]

5. वक्रों के प्राचलिक समीकरणों में प्रत्येक के लिए बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए :

(a) $x=at^2$; $y=2at$ [राज;62]

(b) $x=a\cos^3 t$; $y=b\sin^3 t$ [राज;63]

(c) $x=a(\theta+\sin\theta)$; $y=a(1-\cos\theta)$ [राज., 70 (S)]

6. निम्नलिखित वक्रों पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहां स्पर्श रेखा x-अक्ष पर लम्ब हो—

(a) $y^2=4ax$ (b) $y^3=x^2(2a-x)$

(c) $ax^2+2hxy+by^2=1$

7. निम्नलिखित वक्रों पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहां स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो—

(a) $y=\sin x$

(b) $y=x^3-3x^2-9x+5$ [राज; 59, 65]

(c) $x^2+y^2+2x-4y=20$ [राज., बोर्ड 57, 69]

(d) $6y=2x^3-9x^2+12x+8$ [राज; 51, 61]

8. निम्न वक्रों के किन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है—

(a) $y=\sin x$ (b) $y^2=4ax$

(c) $y^2=x$ (d) $xy+4=0$ [राज., 67]

9. निम्न वक्रों के किन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ उनके सम्मुख प्रदर्शित सरल रेखा के समान्तर है—

(a) $y=2x^2-x+1$; $y=3x+4$

(b) $y=(x-2)(x-3)$; $2y=10x+3$

10. वक्र $y=x^3$ पर उस बिन्दु को ज्ञात करो जिस पर खींची गई स्पर्श रेखा x-अक्ष को $60°$ पर काटती है, और स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

11. निम्न वक्रों का प्रतिच्छेद कोण ज्ञात कीजिए—

(a) $y=x^2$ और $x^2+y^2=20$

(b) $2y^2=x^3$ और $y^2=32x$ [राज; बोर्ड 62]

(c) $x^2+y^2-4x-1=0$ और $x^2+y^2-2y-9=0$

12. सिद्ध करो कि निम्न वक्र परस्पर समकोण पर काटते हैं :

(a) $x^3-3xy^2=a$ और $3x^2y-y^3=b$

(b) $x^2+4y^2=8$ और $x^2-2y^2=4$

13. उन प्रतिबन्धों को ज्ञात कीजिये जिसमें निम्न वक्र समकोण पर काटते हैं—

(a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ और $xy=c^2$

(b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ और $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$ [राज., 71]

(c) $ax^2+by^2=1$ और $a'x^2+b'y^2=1$

प्रश्नावली 10 (b)

1. यदि वक्र $y=f(x)$ के (x, y) बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा का झुकाव $60°$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा—

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $60°$ (D) $\frac{\pi}{3}$ ( )

2. बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है—

(A) $(Y-y)+\frac{dy}{dx}(X-x)=0$

(B) $(Y-y)\frac{dy}{dx}=X-x$

(C) $(Y-y)-\frac{dy}{dx}(X-x)=0$

(D) $(Y-y)\frac{dy}{dx}=(X-x)$ ( )

3 बिन्दु (x, y) पर अभिलम्ब का समीकरण है—

(A) $(Y-y)\frac{dy}{dx}=(X-x)$

(B) $(Y-y)\frac{dy}{dx}-(X-x)=0$

(C) $(Y-y)\dfrac{dx}{dy}=(X-x)$

(D $Y-y)\dfrac{dx}{dy}+(X-x)=0$ ( )

4. यदि वक्र $y=f(x)$ के बिन्दु (x, y) पर खींची हुई स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर हो तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान होगा—

(A) 0 (B) ∞ (C) 1 (D) -1 ( )

5. वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ के निम्न विन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर होगी—

(A) (1,2) (B) (3,0) (C) (5,1) (D) (–2,1) ( )

6. वक्र $y=x^3-3x^2-9x+5$ के उस विन्दु के, जहाँ स्पर्श रेखा y-अक्ष के अभिलम्ब है, निर्देशांक लिखो। (................)

7. वृत्त $x^2+y^2=2x+3$ के उस विन्दु के जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्ब है, निर्देशांक लिखो। (................)

8. वक्र $xy+4=0$ के उस विन्दु के जहाँ स्पर्श रेखा दोनों अक्षों से समान कोण बनाती है, निर्देशांक लिखो। (................)

9. वक्र $y=4x-x^2$ के बिन्दु (0,0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है—

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0 ( )

[राज० हायर सैकण्डरी, 73]

10. वक्र $y=\dfrac{2}{x}$ के विन्दु (2, 1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण लिखिये।

[राज० हायर सैकण्डरी, 73]

(..................................)

ज्वारभाटा

खण्ड (अ)

निर्देशांक ज्यामिति

प्रश्नावली 1 (a) पृष्ठ [11-13]

2. $(a,0)$, (a,a) $(0,a)$ तथा $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

3. परस्पर लम्ब भुजाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूल बिन्दु मानकर निर्देशांक होंगे:—

   $(a,0)$, (a,b), $(0,b)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ जब भुजा a, x-अक्ष तथा b, y-अक्ष पर हो

4. $(-3,-2)$, $(3,-2)$, $(3,2)$, $(-3,2)$ जब भुजा 6, x-अक्ष के समान्तर हो।

5. (i) 10 (ii) $\sqrt{97}$ (iii) $\sqrt{58}$ (iv) $(a-b)\sqrt{2}$.

6. (i) 13 (ii) $\sqrt{13}$ (iii) $\sqrt{17}$ (iv) a (v) $\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}$

9. 15. 11. $\sqrt{5}+\sqrt{13}(1+\sqrt{2})$ 14. 50 वर्ग इकाई

16. $(3,6)$ अथवा $(1,2)$ 17. $(0,2-3\sqrt{3})$

19. $(-3,2)$ 20. $(3,3)$; $\sqrt{10}$

प्रश्नावली 1 (b) पृष्ठ [22-24]

1. $(5,3)$ $(1,11)$ 2. $(-\frac{1}{3},\frac{10}{3})$; $(-\frac{19}{3},\frac{37}{3})$

3. 3:2 4. बाह्य विभाजन 1 : 2 में

5. (i) अन्तर्विभाजन 1 : 2 में (ii) बाह्य विभाजन 2 : 5 में

6. $(\frac{1}{2},-2)$; $(-\frac{7}{2}, 0)$ 7. $(-\frac{5}{2},\frac{9}{2})$, $(1,1)$; $(\frac{9}{2},-\frac{6}{2})$

8. (0,3) 9. (4, −1).

10. $\sqrt{10}$; 2; $\sqrt{10}$

12, $\dfrac{-3a+b+3c}{a+b+c}$, $\dfrac{-2a+b+6c}{a+b+c}$.

जहां $a=\sqrt{29}$, $b=10$ तथा $c=5$.

13. (6,0); (14,4); (−4,10); (4, −6).

प्रश्नावली 1 (c) पृष्ठ [28-30]

1. (i) $\frac{3}{2}$ इकाइयां (ii) $\frac{31}{2}$ इकाइयां (iii) $\frac{3}{2}$ इकाइयाँ

(iv) $\left\{2ab \sin\dfrac{\beta-\gamma}{2} \quad \sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2} \quad \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right\}$

4. 1 5. (i) 7 (ii) 0 (iii) 5 इकाई

7. $\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$ 8. (8,5)

12. (7,2) या (1,0) 15. $(a+c)\, d=b\,(c+d)$ 16. (11,10)

प्रश्नावली 1 (d) पृष्ठ [30-32]

1. (B) 2. (C) 3. (A) 4. (B) 5. (D)
6. (B) 7. (C) 8. (B) 9. (D) 10. (C)
11. (A) 12. (D)

प्रश्नावली 1 (e) पृष्ठ [32-34]

1. $\frac{1}{2}(ad-bc)$ 2. (4,2) 3. (D) 4. (C)
5. 2 : 3 6. (C) 7. (C) 8. (B)
9. $\left(3, -\frac{13}{3}\right)$ 10. (C) 11. (C) 12. 10
13. (A) 14. (D) 15. (B) 16. (C)
17. (A) 18. 3

प्रश्नावली 2 (a) पृष्ठ [39-41]

1. $y=3$ 2. $x=4$ 3. $x=3y$
4. $x^2-3y^2-2ax+a^2=0$ 5. $y^2-2b(y+x)=0$
6. $y^2-3x^2=0$ 7. $6x-4y=11$
8. (i) $x^2+y^2=a^2$ (ii) $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-a^2}=1$
   (iii) $4ax+c^2=0$
9. $x^2+y^2+a^2-k=0$ जहाँ AB, x-अक्ष है।
   AB का मध्य बिन्दु (0,0) तथा AB की लम्बाई $2a$ है।
10. $x^2+2ay=a^2$ 11. $y=x$ 12. $2x+3y=5$
14. $x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0$
18. $(-3,0)$, $(0,3)$

प्रश्नावली 2 (b) पृष्ठ [41-42]

1. (B) 2. (B) 3. (C) 4. (D)
5. (B) 6. $8x+6y=25$

प्रश्नावली 3 (a) पृष्ठ [52-54]

1. (i) $y=4$ (ii) $y+7=0$
2. $x=3$; $x=-4$; $5x-2=0$
3. $x=-3$; $y=2$
4. (i) $y=x+2$ (ii) $y+\sqrt{3}x+5=0$ (iii) $3x-4y=24$
5. (i) $\sqrt{3}\,y+x=0$ (ii) $\sqrt{3}\,y-x=0$
6. (i) $2\sqrt{3}$; $150°$ (ii) $-\frac{5}{2}$; $\tan^{-1}(\frac{5}{2})$
7. (i) $y=x$; $y=-x$ (ii) $x-y-4=0$
8. (i) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ (ii) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$
   (iii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ (iv) $\frac{x}{1}+\frac{y}{4}+1=0$

9. $x+y=5$

10. $x+2y=5$

11. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1;\ \frac{x}{10}-\frac{y}{5}=1$

12. $8x-9y-42=0$

13. $5x+3y+30=0$

14. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{4}{9}$

15. $3x-2y=0$

16. $y-\sqrt{3}\,x=8$

17. $x+y=3\sqrt{2}$

18. $\frac{25}{12}$

प्रश्नावली 3 (b) पृष्ठ [65-67]

1. (i) $\frac{8}{7};\ \tan^{-1}\left(-\frac{2}{7}\right)$ (ii) $-\frac{5}{4};\ \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

   (iii) $-\sqrt{3};\ 45°$

2. $\frac{7}{4},\ \frac{\;}{|3};\ \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right);\frac{49}{24}$.

3. (i) $\frac{5}{2};\ -60°$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \tan^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right)$

4. $\frac{5}{6}\sqrt{13},\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$.   6. $\frac{x}{\;}+\frac{y}{4}=1$ अथवा $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

7. $y+\sqrt{3}x=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ 8. $l=\frac{16}{5};m=-\frac{24}{5}$

9. (i) $-\frac{7}{3}$ (ii) -1 (iii) $\frac{b}{a}$ (vi) $\frac{2}{t_1+t_2}$

10. (i) $3y+4x=0$ (ii) $x+3y=1$ (iii) $y-x+1=0$

11. (i) $\frac{y}{a}-\frac{x}{b}=1$ (ii) $x(a-2b)-by=a^2-2ab-b^2$

   (iii) $x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

12. (i) $x-2y=3$, (ii) $x-y+1=0$
 (iii) $x(b'-b)-y(a'-a)=0$
13. $(b-a)y-x(d-c)=bc-ad$
 और $y(b-a)-x(c-d)=bd-ac$
14. (i) $2y-3x=0$; $5x+4y=0$, $x+3y-11=0$
 (ii) $x-2y-3=0$; $3y-2x+4=0$; $y-x+3=0$
15. $y=4$ 16. $2ay-2b'x=ab-a'b'$
17. $y-x=1$; 0
18. x अक्ष से 15° अथवा 75° बनाने वाली रेखा
19. $y-x=1$; $3\sqrt{2}$
20. x—अक्ष के साथ 45° का कोण बनाने वाली

प्रश्नावली 3 (c) पृष्ठ [68-70]

1. (B) 2. (D) 3. (C) 4. (A)
5. (B) 6. (C) 7. (D) 8. (B)
9. (C) 10. (B) 11. (A) 12. (B) 13. (B)

प्रश्नावली 3 (d) पृष्ठ [70-72]

1. (C) 2. (A) 3. (C) 4. $x+y=7$
5. $x+y=9$ 6. (B) 7. (D) 8. (C)
9. (C) 10. (D) 11. 5·2
12. 2 : 3 तथा 3 : 5 दोनों बाह्य विभाजन

प्रश्नावली 4 (a) पृष्ठ [82-84]

1. 45° 2. $\tan^{-1}(\frac{17}{6})$ 3. 60°
4. $7x-4y=15$ 5. $2x+3y=17$
6. $x+3y+8=0$ 7. $3x+4y=32$
8. $8x-7y+118=0$ 9. $x-2y+10=0$
10. $5x+7y=6$ 11. $mx-ly=mh-lk$

12. $x+y=3$ 13. $ax-by+b^2=0$

14. $x-2y+3=0$; $5x+2y=25$; $x+y=7$

15. $7y-23x+9=0$; $7x+23y=53$.

16. $x+5y=7$; $5x-y=9$.

17. $x-y\sqrt{3}-3-2\sqrt{3}=0$ और $x-3=0$.

18. $9x-7y=1$ और $7x+9y=73$.

19. $6x-16y+13=0$.

प्रश्नावली 4 (b) पृष्ठ [96-98]

1. विपरीत ओर 2. एक ही ओर

5. 2 6. $\frac{16}{\sqrt{14}}$ 7. $\frac{7}{5}$

8. $\frac{a^2+ab-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 9. $\frac{4}{5}$ 10. $a \cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

11. (i) $1\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{c-d}{\sqrt{1+m^2}}$ 12. $\frac{6}{5}$

16. $11x-3y=0$; $3x+11y-10=0$.

17. $x-2y+1=0$; $2x+y-3=0$.

18. $y=2$; $x=6$.

19. $x(\cos\alpha-\cos\beta)+y(\sin\alpha-\sin\beta)=p-q$.
$x(\cos\alpha+\cos\beta)+y(\sin\alpha+\sin\beta)=p+q$.

20. $3x-y=18$, 21. $3x-y+2=\pm\sqrt{2}(x-2y-3)$

22. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 23. $\left(\frac{3a+b-c}{a+b+c}, \frac{a-2b+0.c}{a+b+c}\right)$

जहाँ $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{17}$, $c=\sqrt{13}$

प्रश्नावली 4 (c) पृष्ठ [110-112]

1. $(5, 2)$ 2. $(-1, 2)$ 3. (a, b)
4. $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ 5. (a) $(4,3)$ (b) $(5,-4)$
6. $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$ 8. (a) 2; (b) 3
9. (a) -2; (b) 5
10. (i) $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई (ii) 4 वर्ग इकाई (iii) $10\frac{5}{18}$ वर्ग इकाई (iv) $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई
12. $x-2y+3=0$; $5x+2y-25=0$; $x+y-7=0$
13. $(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$ 14. $10x+11y=51$ 15. $13x+3y=27$
16. $5x+3y+8=0$
17. (a) $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$; (b) $(1, 8)$. 18. $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$
19. $\frac{1}{25}(a-b)(c-d)$. 20. $x+4y=0$, 21. $x-y=11$
22. (i) $36x-27y+62=0$; (ii) $27x+36y=91$.
23. $x+y+1=0$. 24. $13x-23y=64$. 26. $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई

प्रश्नावली 4 (d) पृष्ठ [113-115]

1. (A)	2. (C)	3. (B)	4. (C)
5. (D)	6. (A)	7. (B)	8. (C)
9. (B)	10. (D)	11. (A)	12. (B)
13. (C)	14. (D)	15. (B)	

प्रश्नावली 4 (e) पृष्ठ [115-116]

1. (A)	2. (B)	3. (C)	4. (C)
5. (A)	6. (B)	7. (D)	8. 5
9. (D)	10. $(-1,-1)$	11. (C)	

12. $2x+y+1=0$; $5x+2y-50=0$; $9x+4y-48=0$;

13. $\frac{1}{5}(3x_1+4y_1-10)$ 14. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 15. $3x-5y-2=0$
16. $8x-4y+11=0$; $8x+16y-39=0$: 90°

प्रश्नावली 5 (a) पृष्ठ [122-123]

1. $x^2+xy-12y^2=0$. 2. $x^2-y^2=0$.
3. $15x^2+38xy+24y^2+26x+30y-21=0$
4. $x=0$; $y=0$. 5. $x-3=0$; $x-2=0$.
6. $2x+y=0$; $x+2y=0$.
7. $y-2x=0$; $y-3x=0$; $y+4x=0$:
9. $6\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई 10. $\frac{a^2}{2}$ वर्ग इकाई
11. $\frac{3a^2}{8}$ वर्ग इकाई 12. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ वर्ग इकाई
13. $6x+5y=56$; $6x-5y+14=0$.

प्रश्नावली 5 (b) पृष्ठ [131-133]

1. $\tan^{-1}(2\sqrt{3})$; $x^2-y^2+3xy=0$
2. θ; $x^2-y^2=0$
3. 45°; $\sqrt{17}\,(x^2-y^2)-2xy=0$.
4. $\tan^{-1}(\frac{6}{13})$; $7\,(x^2-y^2)+3xy=0$.
5. (i) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\sin\theta}\right)$; $x^2-y^2=0$

   (ii) $\frac{\pi}{2}$; $x^2+2xy\cot\theta-y^2=0$
9. $p^2-q^2-6p+1=0$ 10. $\sqrt{b^2+4a}$; $\frac{b}{a}$; $\frac{-b}{1+a}$
12. $2x^2+4xy+3y^2=0$.

13. $(ab' - a'b)^2 = 4(ha' - h'a)\ (bh' - b'h)$.

18. $8\ \frac{\sqrt{13}}{3}$

21. $(aa' - bb')^2 + 4(bh' + a'h)\ (b'h + ah') = 0$

प्रश्नावली 5 (c) पृष्ठ [139-140]

2. Zero.
3. (*i*) $k = 2$; $4x - 2y + 1 = 0$ तथा $3x - y + 2 = 0$.
   (*ii*) $k = 6$; $2x + 3 = 0$; $3y - 4 = 0$.
   (*iii*) $k = 12$; $2y - x - 3 = 0$; $y + 2x - 4 = 0$.
4. (*i*) $3x - y + 2 = 0$ तथा $2x + y - 3 = 0$; $45°$, $(\frac{1}{5}, \frac{13}{5})$
   (*ii*) $x + 3y + 2 = 0$ तथा $x - 4y - 3 = 0$; $\tan^{-1}(\frac{7}{11})$;$(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7})$
   (*iii*) $3x - 5y + 2 = 0$ तथा $2x + 3y - 5 = 0$; $\tan^{-1}(\frac{19}{9})$;$(1, 1)$
5. $c = -6$;$2x - 5y = 2$;$3x + 2y + 3 = 0$; $\tan^{-1}(\frac{19}{4})$;$(-\frac{11}{19}, -\frac{12}{19})$
6. $(0, 5)$ 7. $\frac{5}{2}$, 8. $\frac{5}{\sqrt{137}}$ 9. $\frac{6}{\sqrt{10}}$

प्रश्नावली 5 (d) पृष्ठ [143-145]

1. (*i*) $xy = 0$ (*ii*) $5x^2 - 12xy + 8y^2 = 0$
2. $11x^2 - 14xy + 3y^2 = 0$; $\tan^{-1}(\frac{4}{7})$
3. $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2950}}{13}\right)$ 5. (*i*) ± 1 (*ii*) $\frac{1}{2}$
7. $x^2(c + 2am) + y^2(c - 2b) + 2xy\ (bm - a) = 0$, $c = b - am$.
8. $x^2 + 30xy - y^2 = 0$. 10. $-1 \pm \sqrt{17}$

प्रश्नावली 5 (e) पृष्ठ [145-148]

1. (C)	2. (D)	3 (C)	4 (A)
5. (B)	6. (D)	7. (B)	8. (C)

9. (B) 10. (C) 11. (A) 12. (D)
13. (B) 14. (C)

विविध प्रश्नावली 5 (f) पृष्ठ [148-152]

1. (A) 2. (A) 3. (B)
4. $ac-g^2-ch^2=0$ 5. $2\sqrt{\frac{2}{5}}$ 6. (A)
7. (C) 8. (A) 9. (A)
10. (D) 11. (C) 12. (B)
13. (D) 14. $90°$ 15. (B)
16. (C) 17. $2x+3y+1=0$; $2x+3y+2=0$ 18. (D)
20. $x-2y+1=0$; $2x+y-3=0$
21. $2x-y-3=0$; $2x-y+1=0$; $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

खण्ड (ब)

अवकलन गणित

प्रश्नावली 6 (a) पृष्ठ [159]

1. (a) 0 (b) 2 (c) -8
2. $-\frac{5}{4}$; $\frac{1}{2}(3-4\sqrt{2})$ 3. $\frac{20-3x}{12-5x}$

प्रश्नावली 6 (b) पृष्ठ [171-172]

1. 2 2. 0 3. 3 4. $\frac{1}{4}$
5. $\frac{3a}{2}$ 6. -1 7. $\frac{1}{2}$ 8. $-\frac{1}{12}$
9. $\frac{5}{3}$ 10. 1 11. 1 12. 6
13. $\frac{m}{n}$ 14. $\log_e a$ 15. $\cos x$ 16. 2
17. $\frac{1}{2}$ 18. 2 19. 1 20. $\frac{1}{4}$

21. e^{-1} 22. 1 23. n 24. 2

25. ∞ 26. -1 27. $\frac{1}{2}$ 28. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

29. $\frac{1}{2}$ 30. $\frac{1}{2}$

प्रश्नावली 6 (c) पृष्ठ [172-173]

1. (C) 2. (A) 3. (B) 4. $\frac{17}{4}$

5. $\frac{3}{2}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. (B)

प्रश्नावली 7 (a) पृष्ठ [180]

1. $7x^6$ 2. $-2x^{-3}$ 3. $-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ 4. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

5. $1-x^{-2}$ 6. $9x^2+10x$ 7. $2ax+b$

8. $2x-5$ 9. $-(3x+4)^{-2}$ 10. $an(ax+bn)^{n-1}$

11. $\frac{a^2x}{\sqrt{(a^2x^2+b^2)}}$ या $a^2x(a^2x^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$

प्रश्नावली 7 (b) पृष्ठ [182]

1. $-3e^{-3x}$ 2. $-e^{-x}$ 3. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ 4. $e^x(1+x)$

5. $2^x \log 2$ 6. $\frac{e^{\sqrt{x+2}}}{2\sqrt{x+2}}$

प्रश्नावली 7 (c) पृष्ठ [193]

1. $2 \cos 2x$ 2. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ 3. $\frac{1}{x} \log_a e$

4. $-\sin 2x$ 5. $-2x \sin x^2$ 6. $5 \sec 5x \tan 5x$

प्रश्नावली 7 (d) पृष्ठ [193]

1. (D) 2. (B) 3. (A) 4. (C)

5. (B) 6. 0 7. $\left(-\frac{1}{x}\right)$ 8. $2^x \log 2$

प्रश्नावली 8 (a) पृष्ठ [200-201]

1. $8x^7$; $-3x^{-4}$; $-4x^{-5}$

2. $\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$; $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$; $\frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}}$

3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$; $-\frac{9}{2}x^{-\frac{11}{2}}$

4. $21x^6$; $-20x^{-5}$; $\sqrt{x}$

5. $6x+7$ 6. $36x^3+6x+7$

7. $3ax^2+2bx+c$

8. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,$ (*or* e^x)

9. $\frac{1}{12}\left(16t^{\frac{1}{3}}+30t^{-\frac{1}{2}}+3t^{-\frac{3}{2}}+24t^{-\frac{5}{3}}\right)$

10. $amx^{m-1}+bnx^{n-1}+cpx^{p-1}$

11. $4x+5$ 12. $6x+1$ 13. $3(27x^2-8x+15)$

14. $4x^3$ 15. $x^2(56x^5+28x^4+42x^3+20x^2-168x-72)$

16. $18x^2+46x-1$ 17. $2x(9x^4-55x^3+86x^2-12x-16)$

18. $6x^5+10ax^4+20x^3-2a^4x-2a^5$

19. $\frac{4}{(2-x)^2}$ 20. $\frac{4a}{(a-2x)^2}$

21. $\frac{3x^2+10x-17}{(3x+5)^2}$ 22. $\frac{13x^2+4x-19}{(2x^2+7x+4)^2}$

23. $\frac{2(x^2-1)}{(1+x+x^2)^2}$ 24. $-\frac{1}{x^2}\left[\frac{3a}{x^2}+\frac{2b}{x}+c\right]$

25. $\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left[5cx^3+dx-e\right]$

प्रश्नावली 8 (b) पृष्ठ (202-203)

1. $\cot x.\ (28x^3-5)-\operatorname{cosec}^2 x(7x^4-5x+2)$
2. $\dfrac{\sqrt{x}\,(3x^3+x^2+x+3)}{2x^3}$
3. $\dfrac{(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2}$
4. $\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$
5. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}$
6. $\dfrac{2x(x^2+\sqrt{x^4-1})}{\sqrt{x^4-1}}$
7. $\dfrac{a[a-\sqrt{(a^2-x^2)}]}{x^2\sqrt{(a^2-x^2)}}$
8. $\dfrac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$
9. $\dfrac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$
10. $\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$
11. $-\dfrac{1+\tan x}{\sec x}$
12. $\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$
13. $\dfrac{2^{x-1}}{x^{\frac{3}{2}}}\{\cot x(\log 2^{2x}-1)-2x\operatorname{cosec}^2 x\}$
14. $\dfrac{2}{1-\sin 2x}$
15. $\dfrac{\sec x}{(\sec x+\tan x)^2}$
16. (a) $\sec^2 x$ (b) $-\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $\sec x\tan x$ (d) $-\operatorname{cosec} x\cot x$

प्रश्नावली 8 (c) पृष्ठ (210-211)

1. $2\operatorname{cosec} 2x$; $\dfrac{3}{3x+4}$; $\dfrac{\sec^2(\log x)}{x}$
2. $-5e^{-5x}$; $2e^{2x}-\cos x$; $x^2e^{2x}(3+2x)$
3. $2\cos 2x\, e^{\sin 2x}$; $ae^x+b\cos x$; $\sec^2 x e^{\tan x}$

4. $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; $\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; $\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos\sqrt{x}}}$

5. $\cot x$; $\dfrac{1}{x}\cos(\log x)$

6. $-2e^{-x}\tan(e^{-x})\sec^2(e^{-x})$

7. $5x^4+x^{-1}\cos(\log x)e^{\sin(\log x)}$

8. $\dfrac{1+\sqrt{\log x}}{2x\sqrt{\log x}}$

9. $n(\tan x\sec^n x-\cot x\,\text{cosec}^n x)$

10. $a^x(\cos bx\log_e a-b\sin bx)$

11. $-\dfrac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

12. $\dfrac{(2x-1)(17-6x)}{(3x+2)^4}$

13. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-p)(x-q)}}\times\left\{\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-p}-\dfrac{1}{x-q}\right\}$

14. $\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$

15. $5a^{\tan 5x}.\log_e a.\sec^2 5x$

16. $\log_e 5.\cot x\, 5^{\log\sin x}$

17. $\dfrac{(\cos x)e^{\sqrt{\sin x}}}{2\sqrt{\sin x}}$

18. $-\dfrac{\text{cosec}^2 x\, e^{\sqrt{\cot x}}}{2\sqrt{\cot x}}$

19. $\sqrt{2}\,e^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

20. $2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(-x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

21. $5e^{3x}\cos\left[4x+\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right)\right]$

22. $2\sqrt{5}\,e^{4x}\cos[2x+7\tan^{-1}(\frac{1}{2})]$

23. $\frac{2}{a}\sec^2\left(\frac{x}{a}\right)\tan\left(\frac{x}{a}\right)$ 24. $\frac{\pi}{180}\cos x°$

25. $\cos^2 ax\, e^{\tan x}\left[\cos ax \sec^2 x - 3a \sin ax\right]$

26. $e^{x \cos a} \cos\left(x \sin a + a\right)$ 27. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

28. $\sec x$ 29. $2x \cot(1+x^2)$

30. $\sec x$ 31. $2 \sec^3 x$

32. $\frac{2ab}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$ 33. $\frac{1}{2}e^x \cot(e^x)$

34. $\frac{-2(x^2-1)}{x^4+x^2+1}$ 35. $\operatorname{cosec} x$

36. $(\cos\sqrt{x})\cot x - \frac{(\sin\sqrt{x})\log \sin x}{2\sqrt{x}}$

37. $(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ 38. $\sec^2 x + (1-x^2)^{-1}$

प्रश्नावली 8 (d) पृष्ठ [211-212]

1. (D) 2. (B) 3. (C) 4. (D)

5. (B) 6. $2\sin(\log x)\cos(\log x)\ \frac{1}{x}$

7. $\sec\left[e^{\frac{x}{a}}\right]\tan\left[e^{\frac{x}{a}}\right]e^{\frac{x}{a}}\ \frac{1}{a}$ 8. $2x \cot x^2$.

प्रश्नावली 9 (a) पृष्ठ [217-218]

1. $x^x(1+\log x)$; $x^{\cot ax}\left[\frac{\cot ax}{x} - a\log x \operatorname{cosec}^2 ax\right]$

4. $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; $\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; $\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos\sqrt{x}}}$

5. $\cot x$; $\dfrac{1}{x}\cos(\log x)$

6. $-2e^{-x}\tan(e^{-x})\sec^2(e^{-x})$

7. $5x^4+x^{-1}\cos(\log x)e^{\sin(\log x)}$

8. $\dfrac{1+\sqrt{\log x}}{2x\sqrt{\log x}}$

9. $n(\tan x\sec^n x-\cot x\,\text{cosec}^n x)$

10. $a^x(\cos bx\log_e a-b\sin bx)$

11. $-\dfrac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

12. $\dfrac{(2x-1)(17-6x)}{(3x+2)^4}$

13. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-p)(x-q)}}\times\left\{\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-p}-\dfrac{1}{x-q}\right\}$

14. $\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$

15. $5a^{\tan 5x}.\log_e a.\sec^2 5x$

16. $\log_e 5.\cot x\; 5^{\log\sin x}$

17. $\dfrac{(\cos x)e^{\sqrt{\sin x}}}{2\sqrt{\sin x}}$

18. $-\dfrac{\text{cosec}^2 x\, e^{\sqrt{\cot x}}}{2\sqrt{\cot x}}$

19. $\sqrt{2}\,e^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

20. $2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(-x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

21. $5e^{3x}\cos\left[4x+\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right)\right]$

22. $2\sqrt{5}\,e^{4x}\cos\left[2x+7\tan^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]$

23. $\frac{2}{a}\sec^2\left(\frac{x}{a}\right)\tan\left(\frac{x}{a}\right)$ 24. $\frac{\pi}{180}\cos x^\circ$

25. $\cos^2 ax\, e^{\tan x}\left[\cos ax \sec^2 x - 3a \sin ax\right]$

26. $e^{x\cos\alpha}\cos\left(x\sin\alpha+\alpha\right)$ 27. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

28. $\sec x$ 29. $2x\cot(1+x^2)$

30. $\sec x$ 31. $2\sec^3 x$

32. $\frac{2ab}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$ 33. $\frac{1}{2}e^x\cot(e^x)$

34. $\frac{-2(x^2-1)}{x^4+x^2+1}$ 35. $\operatorname{cosec} x$

36. $(\cos\sqrt{x})\cot x - \frac{(\sin\sqrt{x})\log\sin x}{2\sqrt{x}}$

37. $(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ 38. $\sec^2 x + (1-x^2)^{-1}$

प्रश्नावली 8 (d) पृष्ठ [211-212]

1. (D) 2. (B) 3. (C) 4. (D)

5. (B) 6. $2\sin(\log x)\cos(\log x)\,\frac{1}{x}$

7. $\sec\left[e^{\frac{x}{a}}\right]\tan\left[e^{\frac{x}{a}}\right]e^{\frac{x}{a}}\ \frac{1}{a}$ 8. $2x\cot x^2$.

प्रश्नावली 9 (a) पृष्ठ [217-218]

1. $x^x(1+\log x)$; $x^{\cot ax}\left[\frac{\cot ax}{x} - a\log x\operatorname{cosec}^2 ax\right]$

2. $(\log x)^{x^{-1}}[\log x \log(\log x)+1]$;

$x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{\sin^{-1}x}{x}+\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

3. $5^{x^2+3x+4}(2x+3)\log 5$

4. $(\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x \log \sin x\right]$;

$(\cos x)^{\log x}\left[\frac{1}{x}\log\cos x-\tan x \log x\right]$

5. $(\log x)^{\sin x}\left[\cos x \log\log x+\frac{\sin x}{x\log x}\right]$;

$\left(\sin^{-1}x\right)^{\log x}\left[\frac{1}{x}\log\sin^{-1}x+\frac{\log x}{\sqrt{(1-x^2)}\sin^{-1}x}\right]$

6. $\text{ot } x)^{\sin x}\left[\cos x\log\cot x-\sec x\right]+$

$(\tan x)^{\log x}\left[\frac{\log\tan x}{x}+\frac{2\log x}{\sin 2x}\right]$

7. $x^{x^2+1}\log_e(ex^2)$

8. $(1+x)^x\left\{\frac{x}{1+x}+\log(1+x)\right\}$

9. $(\sin x)^x\{\log\sin x+x\cot x\}$

10. $(\sin x)^{\log x}\left\{\frac{\log\sin x}{x}+\log x\cot x\right\}$

11. $3^{x\log x}.\log_e 3.\log ex$

12. $e^{x^x}.x^x.\log_e ex$

13. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left\{\log\frac{+x}{x}-\frac{1}{x+1}\right\}$

14. $x^x \log ex - x^{\frac{1}{2}-2} \log \left(\frac{x}{e}\right)$

15. $x^x(1+\log x) + (\sin x)^x(\log$ [illegible]

16. $(\sin x)^x\{\log\sin x + x\cot x\} +$ [illegible]

17. $\frac{3(2-x^2)}{(1+x)(2-x)\sqrt{(1-x^2)}}$ [illegible]

18. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-a)(x-b)}{(x-p)(x-q)}} \times \Big($ [illegible]

19. $\frac{(4x+1)e^2 e^{2x}}{2\sqrt{x}}$

20. $-e^{\cot x}\cos^3 ax\,(3a$ [illegible]

21. $e^x(\sin x + x\cos x +$ [illegible]

22. $2e^{x^2}\sec^2 x.\,(x+\tan$ [illegible]

23. $\sin x \sin 2x \sin 3x$ [illegible]

24. $\tan x.\log x\, e^x . x^x . \sqrt{x}$ [illegible]

$\Big[2\operatorname{cosec} 2x + \frac{1}{x\log x}$ [illegible]

प्रश्नावली [illegible]

1. $-\frac{y}{x}$ [illegible]

3. $-\frac{x^2+y}{y^2+x}$ [illegible]

5. $\frac{y(x-y)}{x(x+y)}$ [illegible]

7. तथा 8. $-\dfrac{yx^{y-1}+y^{x}\log y}{xy^{x-1}+x^{y}\log x}$ 9. $\dfrac{1}{x}\cos^2 y$

प्रश्नावली 9 (c) पृष्ठ [223-24]

1. $\dfrac{1}{t}$
2. $-\dfrac{b}{a}\cot\theta$
3. $-\tan t$
4. $\tan t$

प्रश्नावली 9 (d) पृष्ठ [224]

1. (C)
2. (D)
3. (D)
4. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$
5. $\dfrac{y^2}{x-xy\log x}$

प्रश्नावली 10 (a) पृष्ठ [233-235]

1. $-1;1$
2. (a) $Xx+Yy=a^2$; $Xy-Yx=a$

   (b) $Yy=2a(X+x)$; $Y-y=-\dfrac{y}{2a}(X-x)$

   (c) $\dfrac{Xx}{a^2}+\dfrac{Yy}{b^2}=1$; $\dfrac{Yx}{a^2}-\dfrac{Xy}{b^2}=xy\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)$

   (d) $\dfrac{Xx}{a^2}-\dfrac{Yy}{b^2}=1$; $\dfrac{Yy}{b^2}+\dfrac{Xx}{a^2}=xy\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$

3. (a) $x+\sqrt{3}y=2a$ $\sqrt{3}x-y=0$

   (b) $2y-x=4$; $y+2x=12$

4. $a=2;\ b=-7$
5. (a) $ty=x+at^2$; $y+tx=2at+2at^3$

   (b) $bx\cos t+ay\sin t=ab\sin t\cos t$;

   $ax\cos t-by\sin t=a^2\cos^4 t-b^2\sin^4 t$.

8.
9.
10
11
12
13

$y=(x-a\theta)\tan\frac{\theta}{2}$;

$y-a(1-\cos\theta)=-\cot\frac{\theta}{2}\left\{x-a(\theta+\sin\theta)\right\}$

6. (a) $(0, 0)$ (b) $(0, 0)$ और $(2a, 0)$

   (c) उन बिन्दुओं पर जहाँ सरल रेखा $hx+by=0$ दिये हुए वक्र को काटती है।

7. (a) $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right); \left[\frac{3\pi}{2}, -1\right], \left[\frac{5\pi}{2}, 1\right]$ ... या $(2n\pi \pm \frac{1}{2}\pi, \pm 1)$

   (b) $(-1, 10)$; $(3, -22)$ (c) $(-1, 7)$; $(-1, -3)$

   (d) $\left(1, \frac{13}{6}\right)$; $(2,2)$

8. (a) $(0, 0)$ (b) $(a, 2a)$

   (c) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (d) $(2, -2), (-2, 2)$

9. (a) $(1, 2)$ (b) $(5, 6)$

10. $\left[3^{-\frac{1}{4}}, 3^{-\frac{3}{4}}\right], \left[-3^{-\frac{1}{4}}, -3^{-\frac{3}{4}}\right]$;

    $y \mp (3)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}\,(x \pm 3^{-\frac{1}{4}})$

11. (a) $\tan^{-1}\left(\frac{9}{2}\right)$ (b) $\frac{\pi}{2}$; $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (c) $\frac{\pi}{4}$

13. (a) $b^2=a^2$ (b) $a^2-b^2=A^2+B^2$

    (c) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}$

प्रश्नावली 10 (b) पृष्ठ [235-236]

1. (B) 2. (C) 3. (B)
4. (B) 5. (A) 6. $(-1, 10)$; $(3, -22)$
7. $(3, 0)$; $(-1, 0)$ 8. $(2, -2)$; $(-2, 2)$
9. (A) 10. $x+1$.